INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXV. BAND FÜNFTES HEFT 1957

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 17. Juli 1957

Postverlagsort Berlin *Preis DM 11.60*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. **Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg — Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35 — Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Isay, W.-H., Der Voith-Schneider-Propeller im Nachstrom eines Schiffsrumpfes. Mit 6 Abbildungen 303

Fehrle, L., Kritische Drehzahlen gewisser Rotorformen unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung. II. Mitteilung. Mit 2 Abbildungen 319

Baehr, H. D., Nichtstationäre Wärmespannungen in ausgemauerten Behältern und die Berechnung der Ausmauerung an Hand eines Temperatur-Schaubildes. Mit 20 Abbildungen 330

Woinowsky-Krieger, S., Zur Theorie schiefwinkliger Trägerroste. Mit 12 Abbildungen 350

Karas, K., Die Auswölbungen der Kreis- und Kreisringmembranen unter hydrostatischem Druck. Erste Mitteilung: Homogener Spannungszustand. Mit 10 Abbildungen 359

INGENIEUR-ARCHIV

XXV. BAND FÜNFTES HEFT 1957

Der Voith-Schneider-Propeller im Nachstrom eines Schiffsrumpfes

Von **W.-H. Isay**

1. Einleitung. In zwei vorangehenden Arbeiten[1] habe ich die Strömung durch „freifahrende" Voith-Schneider-Propeller, d. h. ohne Berücksichtigung des Schiffsrumpfes behandelt. Es liegt nunmehr nahe, aufbauend auf den als bekannt vorausgesetzten Ergebnissen der Arbeiten I und II den Einfluß eines vor dem Voith-Schneider-Propeller liegenden Schiffsrumpfes mit zu berücksichtigen. Hierfür werden in der vorliegenden Arbeit zwei Methoden entwickelt, die wir nacheinander betrachten wollen. Die erste einfachere Theorie fügt sich besonders übersichtlich in unsere früheren Ergebnisse ein, ist für numerische Rechnungen gut geeignet und in ihrer Genauigkeit ausreichend. Die exaktere Theorie ist wesentlich komplizierter; sie wird uns dazu dienen, einen Überblick über die Genauigkeit der einfacheren Theorie zu erhalten. In beiden Fällen behandeln wir die Strömung als ebene Potentialströmung mit der üblichen Singularitätenmethode. Dabei sei darauf hingewiesen, daß eine sehr verfeinerte Theorie mit großem Rechenaufwand schon von vorne herein wenig sinnvoll ist. Denn das ganze Problem der Einwirkung des Schiffsrumpfes auf den Propeller ist wegen der Schräganströmung durch den langsam abfallenden Schiffsboden eigentlich ein dreidimensionales, so daß eine zweidimensionale Theorie stets nur als Näherung angesehen werden kann.

2. Die einfachere Theorie. Die einfachere Theorie, um den Einfluß des Schiffsrumpfes zu berücksichtigen, besteht darin, daß wir die Anströmung u_0 des Voith-Schneider-Propellers ersetzen durch eine Quellsenke mit der Anströmung u_0; also an die Stelle von u_0 tritt jetzt der Ausdruck

$$u_0 + u_0^* - i\, v_0^* = u_0 \left(1 - \frac{b^2}{(z + R + b + a)^2}\right).$$

Eine solche Strömungsfigur besteht bekanntlich aus einem den Schiffsrumpf ersetzenden Kreis vom Halbmesser b, dessen Mittelpunkt bei $z = -(R + a + b)$ liegt, mit Staupunkten bei $z = -(R + a)$ und $z = -(R + a + 2\,b)$ (Abb. 1); a ist der Abstand des Propellers vom Schiffsrumpf. Gegen eine solche Theorie ist natürlich einzuwenden, daß der Einfluß des rotierenden Propellers dieses Bild noch verändert, und zwar in zweifacher Hinsicht:

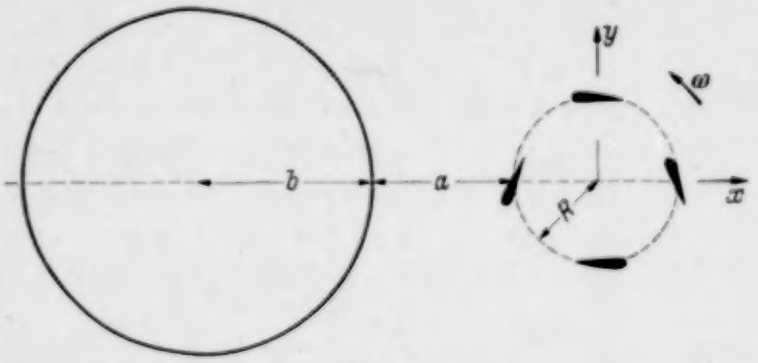

Abb. 1.

Zunächst ist die Propellerströmung instationär, und die Darstellung des Schiffsrumpfes durch eine stationäre Quellsenke führt dazu, daß sich die Kontur des Rumpfes, den die Quellsenke erzeugt, dauernd ändert. Jedoch ist der instationäre Einfluß nicht groß, wie wir noch im Rahmen der exakteren Theorien sehen werden. Weiter haben wir den stationären Einfluß, den der Voith-Schneider-Propeller auf das Strömungsfeld der Quellsenke ausübt; dieser ist etwas größer und bewirkt, daß die Strömungsfigur der Quellsenke kein genauer Kreis vom Halbmesser b bleibt, sondern besonders hinten in der Nähe des Propellers etwas verzerrt wird. Dazu ist zu sagen, daß ja bereits die Ersetzung des wahren Schiffsrumpfes durch einen Strömungskreis eine starke Vereinfachung darstellt, so daß eine gewisse Verzerrung der Kreiskontur hinten am Schiffsrumpf nicht mehr so erheblich sein dürfte. Wesentlich ist an unserem Modell nur, daß die Schiffsbreite durch $2\,b$ gegeben ist, und a den lichten Abstand des Schiffsrumpfes vom Propeller darstellt.

Es ist nunmehr nicht schwer, die bekannte Theorie der Arbeiten I und II entsprechend zu ergänzen. Zu unserem früheren Strömungsfeld treten also noch die Anteile

$$u_0^* - i\, v_0^* = -\, u_0 \frac{b^2}{(z + R + b + a)^2} \tag{1}$$

[1] *W. H. Isay*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 379, Arbeit I; Ing.-Arch. 24 (1956) S. 148, Arbeit II.

hinzu, und für die Berechnung der Zirkulationsverteilung auf den Propellerflügeln benötigen wir die Werte von u_0^* und v_0^* auf dem Umfang des Propellers für $z = R\,e^{i\Phi}$ mit $\Phi = \omega t + \varphi$ (siehe Arbeit I). Es ist

$$u_0^* - i\,v_0^* = -\frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[1 - 2\frac{R\,e^{i\Phi}}{R+a+b} + 3\frac{R^2\,e^{2i\Phi}}{(R+a+b)^2} - 4\frac{R^3\,e^{3i\Phi}}{(R+a+b)^3} + \cdots\right], \quad (2)$$

also

$$\left.\begin{aligned} u_0^* &= -\frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[1 - \frac{2\,R\cos\Phi}{R+a+b} + \frac{3\,R^2\cos 2\Phi}{(R+a+b)^2} - \frac{4\,R^3\cos 3\Phi}{(R+a+b)^3} + \cdots\right], \\ v_0^* &= +\frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[-\frac{2\,R\sin\Phi}{R+a+b} + \frac{3\,R^2\sin 2\Phi}{(R+a+b)^2} - \frac{4\,R^3\sin 3\Phi}{(R+a+b)^3} + \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Da sicherlich $R/(R+a+b) < 0{,}3$ ist in praktischen Beispielen, konvergieren die Reihen gut, und es genügen die ersten Glieder.

Die aus der Randbedingung am Propellerflügel entstehende Integralgleichung (I, 6) bzw. (II, 20), bekommt dann auf ihrer linken Seite zusätzlich noch folgende Glieder, wie man ohne weiteres unter Verwendung der Formeln (3) bestätigt:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\sin\Phi - \cos\Phi\right]u_0^* - \left[\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda)\cos\Phi + \sin\Phi\right]v_0^* \\ &= \frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[\cos\Phi - \frac{2\,R\cos 2\Phi}{R+a+b} + \frac{3\,R^2\cos 3\Phi}{(R+a+b)^2} - \frac{4\,R^3\cos 4\Phi}{(R+a+b)^3} + \cdots\right] \\ &- \frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[\sin\Phi - \frac{2\,R\sin 2\Phi}{R+a+b} + \frac{3\,R^2\sin 3\Phi}{(R+a+b)^2} - \frac{4\,R^3\sin 4\Phi}{(R+a+b)^3} + \cdots\right]\frac{r_0'}{R}\cos(\omega t+\lambda). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Zu den Funktionen $f_n(\varphi)$ auf der linken Seite der Integralgleichungen (I, 15) treten dann zusätzlich noch folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \text{zu } f_0\text{:}\quad & -\frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\left(e^{i\varphi}\,e^{-i\lambda} - e^{-i\varphi}\,e^{i\lambda}\right), \\ \text{zu } f_1\text{:}\quad & \frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[e^{i\varphi} + \frac{2\,R}{R+a+b}\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\,e^{2i\varphi}\,e^{-i\lambda}\right], \\ \text{zu } f_2\text{:}\quad & -\frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[\frac{2\,R\,e^{2i\varphi}}{R+a+b} + \frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\,e^{i\varphi}\,e^{i\lambda} + \frac{3\,R^2}{(R+a+b)^2}\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\,e^{3i\varphi}\,e^{-i\lambda}\right], \\ \text{zu } f_3\text{:}\quad & \frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[\frac{3\,R^2\,e^{3i\varphi}}{(R+a+b)^2} + \frac{2\,R}{R+a+b}\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\,e^{2i\varphi}e^{i\lambda} + \frac{4\,R^3}{(R+a+b)^3}\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\,e^{4i\varphi}e^{-i\lambda}\right], \\ \text{zu } f_4\text{:}\quad & -\frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[\frac{4\,R^3\,e^{4i\varphi}}{(R+a+b)^3} + \frac{3\,R^2}{(R+a+b)^2}\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\,e^{3i\varphi}e^{i\lambda} + \frac{5\,R^4}{(R+a+b)^4}\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\,e^{5i\varphi}e^{-i\lambda}\right], \\ \text{zu } f_5\text{:}\quad & \frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[\frac{5\,R^4\,e^{5i\varphi}}{(R+a+b)^4} + \frac{4\,R^3}{(R+a+b)^3}\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\,e^{4i\varphi}e^{i\lambda} + \frac{6\,R^5}{(R+a+b)^5}\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\,e^{6i\varphi}e^{-i\lambda}\right], \\ \text{zu } f_6\text{:}\quad & -\frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2}\left[\frac{6\,R^5\,e^{6i\varphi}}{(R+a+b)^5} + \frac{5\,R^4}{(R+a+b)^4}\frac{r_0'}{R}\frac{1}{2\,i}\,e^{5i\varphi}e^{i\lambda}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Auflösung der durch die Ausdrücke (4) bzw. (5) ergänzten Integralgleichungen erfolgt dann genau nach den in Arbeit I und II angegebenen Methoden, wie man ohne weiteres einsieht.

Auch die Berechnung der resultierenden Kraft des Voith-Schneider-Propellers wird in der aus Ziff. 8 der Arbeit I bekannten Weise durchgeführt; lediglich ist zu beachten, daß bei der Berechnung der resultierenden Geschwindigkeit w zusätzlich noch die Anteile u_0^* und v_0^* aus (3) zu berücksichtigen sind.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß der als ruhend angenommene Schiffsrumpf mit der Geschwindigkeit u_0 angeströmt wird. Umgekehrt kann u_0 ebensogut auch als Schiffsgeschwindigkeit angesehen werden. Nun tritt hinter dem Schiffsrumpf ein sogenannter Nachstrom auf, der bewirkt, daß die effektive Fortschrittsgeschwindigkeit des Propellers relativ zu dem ihn umgebenden Wasser (oder im Sinne unserer bisherigen Betrachtungen die effektive Anströmgeschwindigkeit gegen den ruhenden Propeller) kleiner ist als u_0, und zwar $u_0\,(1-\Lambda)$ mit Λ als Nachstromziffer ($0 < \Lambda < 1$).

Nach Formel (1) können wir die Nachstromziffer auf zwei verschiedene Arten definieren:

1) Mittelung über den Propellerumfang:

$$A_1 = \frac{1}{2\pi} Re \int_0^{2\pi} \frac{b^2\, d\Phi}{(Re^{i\Phi} + R + a + b)^2} = \frac{b^2}{(R + a + b)^2}, \tag{6}$$

wie man sofort aus (2) entnimmt.

2) Mittelung über den Propellerdurchmesser:

$$A_2 = \frac{1}{2R} Re \int_{-R}^{R} \frac{b^2\, dy}{(i\,y + R + a + b)^2} = \frac{b^2}{2R} \int_{-R}^{R} \frac{(R + a + b)^2 - y^2}{[y^2 + (R + a + b)^2]^2}\, dy = \frac{b^2}{R^2 + (R + a + b)^2} = A_2, \tag{7}$$

wobei die Berechnung des Integral wohl übergangen werden kann. Die beiden Nachstromziffern unterscheiden sich nur ganz wenig, wie wir an den später behandelten Zahlenbeispielen sehen werden.

3. Die exaktere Theorie. Wir nehmen an, der Schiffsrumpf liege symmetrisch zur x-Achse und erstrecke sich von $x = -(L + a + R)$ bis $x = -(a + R)$. Dann besteht eine exaktere Behandlung des vorliegenden Problems darin, daß dieser Schiffsrumpf durch eine Quellenverteilung $q(x, t)$ zu ersetzen ist, die so bestimmt werden muß, daß die vorgegebene Schiffskörperkontur zu jeder Zeit Stromlinie des Geschwindigkeitsfeldes bleibt (Abb. 2). Die Quellenverteilung sei auf der x-Achse angeordnet, und es muß die Bedingung für eine geschlossene Konturkurve

$$Q(t) = \int_{-(L + R + a)}^{-(R + a)} q(\xi, t)\, d\xi = 0 \tag{8}$$

erfüllt sein.

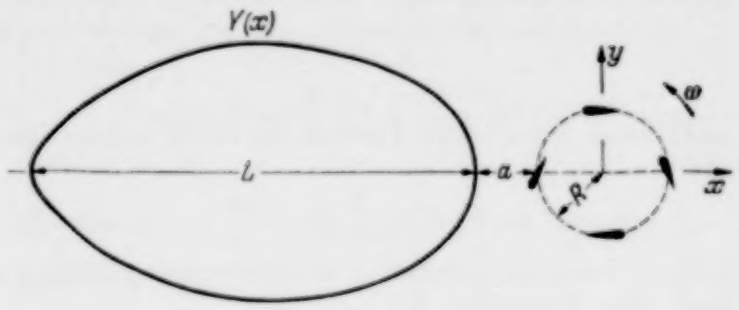

Abb. 2.

Für die Bestimmung der Quellenverteilung und um zu untersuchen, wie groß der Einfluß der vom Propeller induzierten Geschwindigkeiten am Schiffsrumpf ist, berechnen wir zunächst die Geschwindigkeit, die von den Propellerflügeln am Schiffsrumpf (d. h. näherungsweise auf der x-Achse) induziert wird. Dabei ersetzen wir die Propellerflügel durch Punktwirbel der entsprechenden Gesamtzirkulation und erhalten für einen 6-flügeligen Propeller mit $|x| > R$ [1]

$$u_\Gamma - i\, v_\Gamma = \frac{i}{2\pi} \sum_{q=1}^{6} \frac{R\,\Gamma\left(t + \frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right)}{x - Re^{i\left(\omega t + \frac{q-1}{3}\pi\right)}} = \frac{i\,R}{2\pi x} \sum_{q=1}^{6} \Gamma\left(t + \frac{q-1}{3}\frac{\pi}{\omega}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{R}{x}\right)^\nu e^{i\nu\left(\omega t + \frac{q-1}{3}\pi\right)}$$

$$= \frac{i\,R}{2\pi x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{R}{x}\right)^\nu e^{i\nu\omega t} \sum_{\mu=-7}^{7} A_\mu e^{i\mu\omega t} \sum_{q=1}^{6} e^{i\nu\frac{q-1}{3}\pi} e^{i\mu\frac{q-1}{3}\pi}$$

$$= \frac{6\,i}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{R}{x}\right)^{\nu+1} \sum_{\mu=-7}^{7} A_\mu \left(\delta_{6,\nu+\mu} + \delta_{0,\nu+\mu} + \delta_{-6,\nu+\mu}\right) e^{i(\nu+\mu)\omega t}.$$

Dabei haben wir entsprechend (I, 7)

$$\Gamma(t) = \sum_{\mu=-7}^{7} A_\mu e^{i\mu\omega t} \qquad (A_{-\mu} = \bar{A}_\mu) \tag{9}$$

eingesetzt und von der leicht zu beweisenden Relation

$$\sum_{q=1}^{6} e^{i(\nu+\mu)\frac{q-1}{3}\pi} = 6\left(\delta_{0,\nu+\mu} + \delta_{6,\nu+\mu} + \delta_{-6,\nu+\mu}\right)$$

Gebrauch gemacht (δ ist das *Kronecker*symbol).

Also ergibt sich

$$u_\Gamma - i\, v_\Gamma = \frac{6\,i}{2\pi} \sum_{\nu=0} \left(\frac{R}{x}\right)^{\nu+1} \left(A_{-\nu} + A_{6-\nu} e^{6\,i\omega t} + A_{-6-\nu} e^{-6\,i\omega t}\right), \tag{10}$$

[1] Der Summationsbuchstabe q hat natürlich nichts mit der Quellenverteilung zu tun!

wobei natürlich über ν nur soweit zu summieren ist, wie Zirkulationskoeffizienten nach Ansatz (9) vorhanden sind.

Für einen 4-flügeligen Propeller (vgl. Ziff. 7, Arbeit II) ergibt sich ganz analog an Stelle von (10)

$$u_\Gamma - i\,v_\Gamma = \frac{4\,i}{2\,\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{R}{x}\right)^{\nu+1}\left(A_{-\nu} + A_{4-\nu}\,e^{4\,i\,\omega t} + A_{-4-\nu}\,e^{-4\,i\,\omega t} + A_{8-\nu}\,e^{8\,i\,\omega t}\right). \tag{11}$$

In den meisten Fällen dürfte $\left|\frac{R}{x}\right| \leqq \frac{1}{2}$ sein.

Untersucht man nun die zeitabhängigen Anteile in Formel (10) bzw. (11), indem man für die Zirkulationskoeffizienten etwa die Zahlenwerte aus Beispiel 4 bzw. 5 der Arbeit II einsetzt, ferner $R/x = -\frac{1}{2}$ annimmt, so ergibt sich, daß die zeitabhängigen Anteile in (10) und (11) maximal etwa von der Größenordnung $0{,}02\,u_0$ werden. Sie können somit im Rahmen der für die ganze Theorie (s. Einleitung) gemachten Vorbehalte unbedenklich vernachlässigt werden.

Somit wird die von den Propellerflügeln am Schiffsrumpf auf der x-Achse induzierte Geschwindigkeit in guter Näherung (6-flügeliger Propeller)

$$u_\Gamma - i\,v_\Gamma = \frac{6\,i}{2\,\pi}\left[\frac{R}{x}\,A_0 + \left(\frac{R}{x}\right)^2 \bar{A}_1 + \left(\frac{R}{x}\right)^3 \bar{A}_2 + \cdots\right], \tag{12}$$

und die entsprechende Formel für einen 4-flügeligen Propeller ist ganz analog, enthält statt der 6 eine 4.

Setzt man noch $A_\nu = \frac{1}{2}\,B_\nu - \frac{i}{2}\,C_\nu$, so sind die B_ν die Koeffizienten der cosinus- und die C_ν diejenigen der sinus-Glieder in der Reihenentwicklung für $\Gamma(t)$. Dann liefert die Zerlegung von (12) in Real- und Imaginärteil

$$\left.\begin{aligned} u_\Gamma &= -\frac{6}{4\,\pi}\left[\left(\frac{R}{x}\right)^2 C_1 + \left(\frac{R}{x}\right)^3 C_2 + \left(\frac{R}{x}\right)^4 C_3 + \cdots\right] \\ v_\Gamma &= -\frac{6}{4\,\pi}\left[2\,A_0\,\frac{R}{x} + \left(\frac{R}{x}\right)^2 B_1 + \left(\frac{R}{x}\right)^3 B_2 + \left(\frac{R}{x}\right)^4 B_3 + \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Als nächstes berechnen wir die Geschwindigkeit, die von den hinter dem Propeller abfließenden freien Wirbeln am Schiffsrumpf auf der x-Achse induziert wird. Dazu benötigen wir nach Formel (I, 4) folgende Integrale, deren Beweis wir in Ziff. 5 nachholen. Es ist

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\,\pi} \cos n\,\vartheta\,\frac{(x - x^* - R\cos\vartheta)\,d\vartheta\,dx^*}{R^2 + (x-x^*)^2 - 2\,R\,(x-x^*)\cos\vartheta} = -\frac{1}{2\,n}\left(\frac{R}{x}\right)^n, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\,\pi} \sin n\,\vartheta\,\frac{R\sin\vartheta\,d\vartheta\,dx^*}{R^2 + (x-x^*)^2 - 2\,R\,(x-x^*)\cos\vartheta} = -\frac{1}{2\,n}\left(\frac{R}{x}\right)^n. \tag{15}$$

Dagegen ergibt (14) mit $\sin n\,\vartheta$ und (15) mit $\cos n\,\vartheta$ den Wert Null, wie man ohne weiteres erkennt. Sei nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega}\,\dot{\Gamma}\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right) = &-B_1\sin\vartheta - 2\,B_2\sin 2\,\vartheta - 3\,B_3\sin 3\,\vartheta - \cdots \\ &+ C_1\cos\vartheta + 2\,C_2\cos 2\,\vartheta + 3\,C_3\cos 3\,\vartheta + \cdots. \end{aligned}$$

Dann wird bei einem 6-flügeligen Propeller die von den freien Wirbeln am Schiffsrumpf auf der x-Achse induzierte Geschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} u_f &= \frac{1}{2}\,B_1\,\frac{R}{x} + \frac{1}{2}\,B_2\left(\frac{R}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\,B_3\left(\frac{R}{x}\right)^3 + \cdots, \\ v_f &= -\frac{1}{2}\,C_1\,\frac{R}{x} - \frac{1}{2}\,C_2\left(\frac{R}{x}\right)^2 - \frac{1}{2}\,C_3\left(\frac{R}{x}\right)^3 - \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Für einen 4-flügeligen Propeller ist gemäß (II, 19) der Faktor 2/3 hinzuzufügen.

Die gesamten vom Voith-Schneider-Propeller am Schiffsrumpf auf der x-Achse induzierten Geschwindigkeiten sind somit unabhängig von der Zeit gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} u_f + u_I &= \left(\frac{B_1}{2} - \frac{3\,C_1}{2\,\pi}\frac{R}{x}\right)\frac{R}{x} + \left(\frac{B_2}{2} - \frac{3\,C_2}{2\,\pi}\frac{R}{x}\right)\left(\frac{R}{x}\right)^2 + \left(\frac{B_3}{2} - \frac{3\,C_3}{2\,\pi}\frac{R}{x}\right)\left(\frac{R}{x}\right)^3 + \cdots, \\ v_f + v_I &= -\frac{3\,A_0}{\pi}\frac{R}{x} - \left(\frac{C_1}{2} + \frac{3\,B_1}{2\,\pi}\frac{R}{x}\right)\frac{R}{x} - \left(\frac{C_2}{2} + \frac{3\,B_2}{2\,\pi}\frac{R}{x}\right)\left(\frac{R}{x}\right)^2 - \left(\frac{C_3}{2} + \frac{3\,B_3}{2\,\pi}\frac{R}{x}\right)\left(\frac{R}{x}\right)^3 - \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Das gilt für einen 6-flügeligen Propeller; bei einem 4-flügeligen ist noch der Faktor 2/3 anzubringen, im übrigen ist die Formel genau gleich.

Setzt man in (17) z. B. für die Zirkulationskoeffizienten die Zahlenwerte aus Beispiel 4 der Arbeit II ein, so ergeben[1] sich die Geschwindigkeiten (17) maximal noch nicht einmal von der Größenordnung $0{,}2\,u_0$ $\left(\text{für } R/x = -\frac{1}{2}\right)$.

Wie wir aus (17) ersehen, sind die vom Propeller am Schiffsrumpf auf der x-Achse induzierten Geschwindigkeiten in guter Annäherung von der Zeit unabhängig. Wir können somit den Schiffsrumpf durch eine zeitunabhängige Quellenverteilung $q(x)$ darstellen, die auf der x-Achse angebracht ist.

Für den weiteren Ausbau unserer Theorie benötigen wir die von einer solchen Quellenverteilung in der Kreisbahn des Voith-Schneider-Propellers induzierten Geschwindigkeiten u_q und v_q; es ist

$$u_q - i\,v_q = \frac{1}{2\pi}\int_{-(L+R+a)}^{-(R+a)} q(\xi)\frac{d\xi}{Re^{i\Phi} - \xi} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-(L+R+a)}^{-(R+a)} q(\xi)\left[1 + \frac{R}{\xi}e^{i\Phi} + \left(\frac{R}{\xi}\right)^2 e^{2i\Phi} + \cdots\right]\frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \frac{L}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{h(\sigma)\,d\sigma}{R + a + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\cos\sigma}\left[1 - \frac{Re^{i\Phi}}{R + a + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\cos\sigma} + \frac{R^2 e^{2i\Phi}}{\left(R + a + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\cos\sigma\right)^2} - \cdots\right],$$

wobei wir die bekannte Transformation

$$\xi = -R - a - \frac{L}{2}(1 + \cos\sigma), \qquad h(\sigma)\frac{1}{\sin\sigma} = q(\xi) \tag{18}$$

verwendet haben. Nun gelten folgende Integralformeln, deren Beweis wir in Ziff. **5** nachtragen:

$$\frac{L}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos\beta\;\sigma\cdot d\sigma}{\left(R + a + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\cos\sigma\right)^{n+1}} = (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial(R+a)^n}\frac{M^{\beta+1}}{M^2 - 1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{19}$$

mit

$$M = 2\sqrt{\frac{R + a}{L}\left(1 + \frac{R + a}{L}\right)} - 2\frac{R + a}{L} - 1.$$

Wird für $h(\sigma)$ ein Ansatz der üblichen Form gemacht

$$h(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{\beta=1}^{6} h_\beta \cos\beta\,\sigma, \tag{20}$$

[wegen (8) muß $h_0 = 0$ sein], so erhält man die von der Quellenverteilung des Schiffsrumpfes auf dem Umfang des Propellerkreises induzierte Geschwindigkeit in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} u_q - i\,v_q = \sum_{\beta=1}^{6}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,h_\beta\Bigg[&\frac{M^{\beta+1}}{M^2-1} + Re^{i\Phi}\frac{\partial}{\partial(R+a)}\frac{M^{\beta+1}}{M^2-1} \\ &+ R^2 e^{2i\Phi}\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial(R+a)^2}\frac{M^{\beta+1}}{M^2-1} + R^3 e^{3i\Phi}\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial(R+a)^3}\frac{M^{\beta+1}}{M^2-1} + \cdots\Bigg]. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die Zerlegung von (21) in Real- und Imaginärteil ist sofort abzulesen.

Die Behandlung des vorliegenden Strömungsproblems nach der exakteren Theorie besteht jetzt darin, zugleich die Quellenverteilung auf der x-Achse und die Zirkulationsverteilungen auf den Propellerflügeln so zu bestimmen, daß die gegebene Kontur des Schiffsrumpfes Stromlinie der Absolut-

[1] Denken wir jetzt noch einmal an die einfachere Theorie aus Ziff. **2**, so können wir feststellen, daß zu der Quellsenkenströmung noch Störgeschwindigkeiten des Propellers kommen, die an der Hinterseite des Strömungskreises maximal etwa $0{,}2\,u_0$ betragen; sie bewirken wie bereits gesagt eine geringfügige Verzerrung der Kreiskontur die im Rahmen der einfacheren Theorie vernachlässigt werden kann.

strömung wird, und zugleich an den Propellerflügeln die aus Ziff. 4 der Arbeit I bekannte Randbedingung erfüllt ist.

Die Kontur des Schiffsrumpfes sei oberhalb und unterhalb der x-Achse durch $\pm\, Y(x)$ gegeben; dann ist $Y(x)$ die sogenannte Dickenlinie[1], und die Strömungsbedingung am Schiffsrumpf lautet in unserem Fall (Abb. 2)

$$\frac{1}{2}\,q(x) = Y'(x)\left[u_0 + u_f(x) + u_F(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-(L+R+a)}^{-(R+a)} \frac{q(\xi)\,d\xi}{x-\xi}\right], \tag{22}$$

wobei $u_f(x) + u_F(x)$ durch (17) gegeben ist. Gleichung (22) stellt eine Integralgleichung für die gesuchte Quellenverteilung dar; durch die Transformation (18) und den Ansatz (20) kann sie auf die Form

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{\beta=1}^{6} h_\beta \cos\beta\, s - 2\sin s\cdot Y'(s)\,[u_0 + u_f(s) + u_F(s)] \\ &\quad = Y'(s)\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(\sigma)\,\frac{\sin s\,d\sigma}{\cos\sigma - \cos s} \equiv Y'(s)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{\beta=1}^{6} h_\beta \sin\beta\, s \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

gebracht werden. Gleichung (23) kann etwa in der Weise aufgelöst werden, daß man die Gleichung für sechs x- bzw. s-Werte erfüllt und so ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der sechs Koeffizienten h_β erhält.

Andererseits liefert die Randbedingung am Propellerflügel eine Integralgleichung von der bekannten Form (I, 6) bzw. (II, 20), bei der auf der linken Seite zusätzlich noch die von der Quellenverteilung des Schiffsrumpfes induzierten Geschwindigkeiten u_q und v_q aus (21) auftreten. Durch diese zusätzlichen Glieder ist die Integralgleichung für die Zirkulationsverteilung mit der Integralgleichung (22) für die Quellenverteilung verbunden, während andererseits (22) mit der ersteren durch die Anteile $u_f + u_F$ verknüpft ist. Die Auflösung dieser beiden simultanen Integralgleichungen ist prinzipiell durch einen Iterationsprozeß möglich, der jedoch bei praktischen Zahlenbeispielen recht kompliziert und langwierig sein dürfte. Deshalb wird auf einen weiteren Ausbau dieser Theorie verzichtet; wir können dabei auf unsere Ausführungen in der Einleitung verweisen.

4. Zusammenhang zwischen der einfacheren und der exakteren Theorie. Wir wollen nun untersuchen, inwieweit die exaktere Theorie die Einwirkung des Schiffsrumpfes auf den Voith-Schneider-Propeller wesentlich besser erfaßt als die einfachere. Da für diese Einwirkung die Formeln (2) bzw. (21) maßgebend sind, kommt es darauf an, den Zusammenhang zwischen den beiden Formeln zu untersuchen. Um übersichtliche Ergebnisse zu erhalten, greifen wir dazu zwei einfache aber charakteristische Spezialfälle von Quellenverteilungen heraus.

Wir beginnen mit einer eingliedrigen Quellenverteilung, d. h.

$$h(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,h_1 \cos\sigma\,. \tag{24}$$

Dies entspricht gemäß Formel (23) einem Anstieg (Differentialquotient) der Dickenlinie[2]

$$Y'(s) = \frac{h_1}{\sqrt{2\pi\,u_0 + h_1}}\operatorname{ctg} s\,.$$

Dagegen gilt bekanntlich für einen reinen Kreis $Y' = \operatorname{ctg} s$; die hier untersuchten Profile sind also etwas ovaler.

Für die durch (24) gegebene Quellenverteilung stimmt Formel (21) offenbar dann genau mit Gleichung (2) der einfacheren Theorie überein, wenn

$$\left.\begin{aligned} -\frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,h_1\,\frac{M^2}{M^2-1}\,, \\ -\frac{2}{R+a+b} &= \frac{M^2-1}{M^2}\,\frac{\partial}{\partial(R+a)}\,\frac{M^2}{M^2-1}\,; \\ \frac{3}{(R+a+b)^2} &= \frac{1}{2}\,\frac{M^2-1}{M^2}\,\frac{\partial^2}{\partial(R+a)^2}\,\frac{M^2}{M^2-1}\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

[1] Vgl. z. B. *H. Schlichting*, VDI-Forschungsheft 447, (1955) S. 8.

[2] Dabei sind $u_f + u_F$ als klein gegenüber u_0 vernachlässigt.

ist. Wir haben also zu prüfen, ob die Relationen (25) für vernünftige Werte der vorkommenden Konstanten erfüllbar sind. Dazu setzen wir voraus, daß $0{,}1 \leq (R+a)/L \leqq 0{,}25$ sei. In diesem uns interessierenden Bereich kann man in guter Näherung setzen

$$\left.\begin{aligned} M &\approx \frac{R+a}{L} - 0{,}625\,, \\ \sqrt{\frac{R+a}{L}\left(1+\frac{R+a}{L}\right)} &\approx 1{,}5\,\frac{R+a}{L} + 0{,}187\,, \\ M^2 - 1 &\approx \left(\frac{R+a}{L}\right)^2 - 1{,}25\,\frac{R+a}{L} - 0{,}61\,. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Differentiationen sind aber an den strengen Ausdrücken für M usw. auszuführen; erst hinterher können die Näherungsformeln (26) eingesetzt werden. Durch eine elementare Rechnung läßt sich dann zeigen, daß sich die zweite Relation (25) auf die Form bringen läßt

$$\frac{1}{L}(R+a+b) = -\left(1{,}5\,\frac{R+a}{L} + 0{,}187\right)\left[\frac{(R+a)^2}{L^2} - 1{,}25\,\frac{R+a}{L} - 0{,}61\right]$$

oder

$$\frac{b}{L} = 0{,}114 + 0{,}15\,\frac{R+a}{L} + 1{,}69\left(\frac{R+a}{L}\right)^2 - 1{,}5\left(\frac{R+a}{L}\right)^3, \tag{27}$$

während die dritte Relation (25) lautet

$$\frac{1}{L}(R+a+b) = -\left(1{,}5\,\frac{R+a}{L} + 0{,}187\right)\left[\frac{(R+a)^2}{L^2} - 1{,}25\,\frac{R+a}{L} - 0{,}61\right]\frac{1}{\sqrt{\dots}},$$

d. h. annähernd mit (27) übereinstimmt, da die Wurzel für $0{,}1 \leqq (R+a)/L \leqq 0{,}25$ Werte zwischen 1,14 und 1,07 annimmt. Auf eine genaue Wiedergabe des umständlichen Ausdruckes unter der Wurzel wird hier verzichtet. Nach Formel (27) gehört zu $(R+a)/L = 0{,}1$ der Wert $b/L = 0{,}144$ und zu $(R+a)/L = 0{,}25$ der Wert $b/L = 0{,}234$. Die erste Relation (25) liefert dann den zugehörigen Wert von $\sqrt{2/\pi}\,h_1$ und ist natürlich immer zu erfüllen. Hier gehört zu $(R+a)/L = 0{,}1$ der Wert $\sqrt{2/\pi}\,h_1 = 0{,}920\,u_0$ und zu $(R+a)/L = 0{,}25$ der Wert $\sqrt{2/\pi}\,h_1 = 1{,}44\,u_0$.

b) Als zweiten Fall betrachten wir eine der Funktion

$$h(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,h_1\,(\cos\sigma - \cos 3\,\sigma) \tag{28}$$

entsprechende Quellenverteilung. Dies entspricht nach (23) einem Anstieg der Dickenlinie[1]

$$Y'(s) = \frac{h_1\,(\cos s - \cos 3\,s)}{(h_1 + \sqrt{2\,\pi}\,u_0)\sin s - h_1 \sin 3\,s}.$$

Es handelt sich jetzt also um Schiffskörperprofile, die vorne und hinten spitz verlaufen. In diesem Fall stimmt Formel (21) dann genau mit Gleichung (2) der einfacheren Theorie überein, wenn

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_0\,b^2}{(R+a+b)^2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,h_1\,M^2\,, \\ -\frac{2}{R+a+b} &= \frac{1}{M^2}\,\frac{\partial}{\partial(R+a)}\,M^2\,, \\ \frac{3}{(R+a+b)^2} &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{M^2}\,\frac{\partial^2}{\partial(R+a)^2}\,M^2\,\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

ist. Unter Verwendung der Näherungsformeln (26) läßt sich durch eine elementare Rechnung zeigen, daß sich die zweite der Relationen (29) auf die Form bringen läßt

$$0{,}187 + 1{,}5\,\frac{R+a}{L} = \frac{1}{L}(R+a+b) \quad \text{bzw.} \quad \frac{b}{L} = 0{,}187 + 0{,}5\,\frac{R+a}{L}, \tag{30}$$

während die dritte Relation (29) lautet

$$\left(0{,}187 + 1{,}5\,\frac{R+a}{L}\right)\frac{1}{\sqrt{\dots}} = \frac{1}{L}(R+a+b)$$

und somit annähernd mit (30) übereinstimmt, da die Wurzel für $0{,}1 \leqq (R+a)/L \leqq 0{,}25$ Werte

[1] Dabei sind $u_f + u_{f'}$ als klein gegenüber u_0 vernachlässigt.

zwischen 1,12 und 1,06 annimmt. Nach Formel (30) gehört zu $(R+a)/L = 0{,}1$ der Wert $b/L = 0{,}237$ und zu $(R+a)/L = 0{,}25$ der Wert $b/L = 0{,}312$.

Die erste Relation (29) liefert dann den zugehörigen Wert von $\sqrt{2/\pi}\, h_1$ und ist natürlich immer zu erfüllen. Hier gehört zu $(R+a)/L = 0{,}1$ der Wert $\sqrt{2/\pi}\, h_1 = 1{,}79\, u_0$ und zu $(R+a)/L = 0{,}25$ der Wert $\sqrt{2/\pi}\, h_1 = 2{,}13\, u_0$.

Es zeigt sich also, daß (in dem betrachteten Wertebereich der vorkommenden Konstanten) der von den durch (24) und (28) gegebenen Schiffsrumpfprofilen auf den Voith-Schneider-Propeller ausgeübte Einfluß in guter Annäherung durch eine Quellsenkenströmung entsprechend der einfacheren Theorie aus Ziff. **2** ersetzt werden kann. Durch (24) und (28) können bereits viele Schiffsrumpfprofile approximiert werden.

Für die Größe $(R+a)/b$ erhält man mit den vorstehenden Zahlen einen Wertbereich $0{,}7 \leqq (R+a)/b \leqq 1{,}1$ im Fall a) bzw. $0{,}4 \leqq (R+a)/b \leqq 0{,}8$ im Fall b). In diesen Bereichen liegen auch unsere in Ziff. **6** behandelten Zahlenbeispiele.

5. Beweis einiger Integralformeln. Wir haben nun die Beweise für einige Integralformeln nach zuholen, die wir in Ziff. **3** verwendet haben.

a) Zunächst beweisen wir Formel (14), (15). Dazu gehen wir aus von dem Integral

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i n \vartheta} \frac{(x - x^* - R\cos\vartheta)\, d\vartheta\, dx^*}{R^2 + (x-x^*)^2 - 2R(x-x^*)\cos\vartheta}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-x/R}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i n \vartheta} \frac{(\chi + \cos\vartheta)\, d\vartheta\, d\chi}{1 + \chi^2 + 2\chi\cos\vartheta} \qquad (x^* - x = R\chi \text{ gesetzt})$$

wobei wir die zunächst auszuführende Integration über ϑ nach der Residuenmethode vollziehen Nach der Substitution $e^{i\vartheta} = z$ ist der Integrationsweg der Einheitskreis der z-Ebene. Man hat dann [1]

$$J_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-x/R}^{\infty} \left[\frac{1}{2i\chi} \oint_{(EK)} z^{n-1} \frac{1 + 2z\chi + z^2}{(z+\chi)\left(z + \frac{1}{\chi}\right)} dz \right] d\chi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-x/R}^{\infty} \left[-\pi \left(-\frac{1}{\chi} \right)^{n+1} \right] d\chi = -\frac{1}{2n} \left(\frac{R}{x} \right)^n$$

Genau so ergibt sich das Integral

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i n \vartheta} \frac{R \sin\vartheta\, d\vartheta\, dx^*}{R^2 + (x-x^*)^2 - 2R(x-x^*)\cos\vartheta}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-x/R}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i n \vartheta} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\chi}{1 + \chi^2 + 2\chi\cos\vartheta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-x/R}^{\infty} \left[\frac{1}{2\chi} \oint_{(EK)} z^{n-1} \frac{1 - z^2}{(z+\chi)\left(z + \frac{1}{\chi}\right)} dz \right] d\chi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-x/R}^{\infty} \left[\pi i \left(-\frac{1}{\chi} \right)^{n+1} \right] d\chi = \frac{1}{2in} \left(\frac{R}{x} \right)^n .$$

Mit den Integralen J_n und I_n sind auch die Formeln (14) und (15) bewiesen.

b) Wir kommen nun zum Beweis der Integralformel (19). Dazu betrachten wir das Integral

$$K_\beta = \frac{L}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos\beta\sigma\, d\sigma}{R + a + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\cos\sigma} = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\beta\sigma\, d\sigma}{R + a + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\cos\sigma}$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \oint_{(EK)} \frac{z^\beta + z^{-\beta}}{(z - z_1)(z - z_2)} dz \qquad (\beta \geq 1) .$$

und vollziehen die Integration wieder nach der Residuenmethode in der komplexen z-Ebene mit der Substitution $e^{i\sigma} = z$. Es ist

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{4 \frac{R+a}{L} \left(1 + \frac{R+a}{L} \right)} - 2\frac{R+a}{L} - 1 \qquad (z_1 z_2 = 1) ,$$

[1] Da der Schiffsrumpf vor dem Propeller liegt, ist x negativ, also $\left| \frac{x^* - x}{R} \right| > 1$, und somit auch $|\chi| > 1$.

und nur die Wurzel z_1 (+) liegt im Einheitskreis. Folglich gibt das Residiuum bei $z = z_1$ für den Wert des Integrals K_β den Beitrag

$$\frac{1}{2}\,\frac{z_1^\beta + z_1^{-\beta}}{z_1 - z_2}\,;$$

dazu kommt noch der von dem Residuum bei $z = 0$ stammende Anteil. Dazu formen wir den betreffenden Teil des Integranden um:

$$\frac{1}{z - z_1}\,\frac{1}{z - z_2}\,\frac{1}{z^\beta} = \frac{1}{z^\beta}\,\frac{1}{z_1 z_2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^\nu \sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^\mu.$$

Hiervon ist nur das Glied mit $\nu + \mu = \beta - 1$ von Bedeutung, das ist

$$\frac{1}{z_1 z_2}\sum_{\nu+\mu=\beta-1}\frac{1}{z_1^\nu z_2^\mu}\,.$$

Also wird wegen $z_1 z_2 = 1$

$$K_\beta = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1^\beta + z_1^{-\beta}}{z_1 - z_2} + \sum_{\nu+\mu=\beta-1}\frac{1}{z_1^\nu}\,\frac{1}{z_2^\mu}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1^{\beta+1} + z_1^{1-\beta}}{z_1^2 - 1} + \sum_{\nu=0}^{\beta-1} z_1^{\beta-1-2\nu}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{z_1^{\beta+1}}{z_1^2 - 1}\left[1 + z_1^{-2\beta} + \sum_{\nu=0}^{\beta-1}\left(z_1^{-2\nu} - z_1^{-2(\nu+1)}\right)\right] = \frac{z_1^{\beta+1}}{z_1^2 - 1} = \frac{M^{\beta+1}}{M^2 - 1}\,,$$

da ja z_1 mit unseren früheren Größe M identisch ist.

Die zu beweisende Integralformel (19) ergibt sich nunmehr ohne weiteres, indem man das Integral K_β partiell nach dem Parameter $(R + a)$ differentiert.

6. Zahlenbeispiele. Wir wollen nun den Einfluß des Schiffsrumpfes auf den Voith-Schneider-Propeller nach der einfacheren Theorie aus Ziff. 2 an vier Zahlenbeispielen betrachten. Bei den ersten drei Beispielen handelt es sich um einen 4-flügeligen Propeller, den wir freifahrend als Beispiel 5 der Arbeit II behandelt haben. Also mit einer Flügeltiefe von $2\,\alpha = 20°$, einem Fortschrittsgrad $u_0/R\omega = 0{,}25$ und einer Propellerflügelsteigung von $r_0'/R = 0{,}50$. Nunmehr sei bei [1]

Beispiel 5a: $b = 2\,R$, $a = R$, $\dfrac{b}{R + a + b} = 0{,}5$, $\dfrac{R}{R + a + b} = 0{,}25$,

Beispiel 5b: $b = 3\,R$, $a = 2\,R$, $\dfrac{b}{R + a + b} = 0{,}5$, $\dfrac{R}{R + a + b} = \dfrac{1}{6}$,

Beispiel 5c: $b = 2{,}5\,R$, $a = 0{,}5\,R$, $\dfrac{b}{R + a + b} = \dfrac{5}{8}$, $\dfrac{R}{R + a + b} = 0{,}25$.

Um zu prüfen, ob zwischen 4- und 6-flügeligen Propellern wesentliche Unterschiede in bezug auf den Einfluß des Schiffsrumpfes bestehen, berechnen wir als letztes Beispiel den 6-flügeligen Propeller, den wir freifahrend als Beispiel 4 der Arbeit II behandelt haben. Also ist die Flügeltiefe $2\,\alpha = 20°$, der Fortschrittsgrad $u_0/R\omega = 0{,}25$ und die Propellerflügelsteigung $r_0'/R = 0{,}50$. Außerdem sei nunmehr (Beispiel 4a): $b = 2\,R$, $a = R$.

Bei der Berechnung der Zirkulationsverteilung nach den üblichen aus Arbeit I und II gut bekannten Verfahren sind wir so vorgegangen, daß wir jeweils die bekannte Zirkulation (II, 26) und (II, 8) des freifahrenden Propellers beibehalten haben. Durch eine separate Rechnung haben wir dann den Zusatzanteil $\Gamma_N(t)$ der Zirkulation berechnet, der durch die zusätzlichen (vom Einfluß des Schiffsrumpfes stammenden) Glieder (4) in den Integralgleichungen (II, 20) bzw. (I, 6) bedingt ist. Wegen der Linearität der Integralgleichungen ist diese Superposition ja ohne weiteres möglich.

Es ergibt sich[2] bei Beispiel 5a:

$$\begin{aligned}\Gamma_N(t) = {} & -0{,}007 - 0{,}106\cos\omega t - 0{,}076\sin\omega t + 0{,}158\cos 2\,\omega t + 0{,}071\sin 2\,\omega t \\ & - 0{,}020\cos 3\,\omega t - 0{,}036\sin 3\,\omega t + 0{,}005\cos 4\,\omega t + 0{,}003\sin 4\,\omega t \\ & - 0{,}003\cos 5\,\omega t - 0{,}004\sin 5\,\omega t + 0{,}002\sin 6\,\omega t\,,\end{aligned}$$

[1] Die Beispiele 5a und 5c können auch als zwei Schnitte des gleichen Propellers bzw. Schiffes mit verschiedenem Abstand von der Wasseroberfläche angesehen werden. Eine systematische Untersuchung der durch den räumlichen Charakter der Strömung bedingten Erscheinungen wird in einer weiteren Arbeit des Verfassers enthalten sein.

[2] Auf die Ermittelung der Funktion $\gamma(\psi, t)$ wurde hier verzichtet. Sie spielt für die Untersuchung der Strömung und die Berechnung der Kräfte nur eine geringe Rolle, wie wir aus Arbeit II und I wissen.

bei Beispiel 5b:

$$\Gamma_N(t) = -0{,}007 - 0{,}118\cos\omega t - 0{,}068\sin\omega t + 0{,}121\cos 2\omega t + 0{,}059\sin 2\omega t - 0{,}006\cos 3\omega t - 0{,}027\sin 3\omega t - 0{,}002\sin 4\omega t - 0{,}002\cos 5\omega t - 0{,}002\sin 5\omega t,$$

bei Beispiel 5c:

$$\Gamma_N(t) = -0{,}010 - 0{,}166\cos\omega t - 0{,}118\sin\omega t + 0{,}248\cos 2\omega t + 0{,}110\sin 2\omega t - 0{,}030\cos 3\omega t - 0{,}057\sin 3\omega t + 0{,}007\cos 4\omega t + 0{,}005\sin 4\omega t - 0{,}004\cos 5\omega t - 0{,}006\sin 5\omega t$$

und bei Beispiel 4a:

$$\Gamma_N(t) = -0{,}007 - 0{,}068\cos\omega t - 0{,}081\sin\omega t + 0{,}136\cos 2\omega t + 0{,}082\sin 2\omega t - 0{,}018\cos 3\omega t - 0{,}030\sin 3\omega t + 0{,}003\cos 4\omega t - 0{,}008\cos 5\omega t - 0{,}002\sin 5\omega t + 0{,}002\sin 6\omega t\,.$$

Also wird mit (II, 26) bzw. (II, 8) die resultierende Zirkulationsverteilung bei Beispiel 5a:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(t) = {} & 0{,}020 - 0{,}738\cos\omega t - 0{,}106\sin\omega t + 0{,}412\cos 2\omega t - 0{,}114\sin 2\omega t \\ & + 0{,}030\cos 3\omega t - 0{,}016\sin 3\omega t - 0{,}007\cos 4\omega t + 0{,}006\sin 4\omega t \\ & - 0{,}010\cos 5\omega t - 0{,}008\cos 6\omega t + 0{,}017\sin 6\omega t\,,\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

bei Beispiele 5b:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(t) = {} & 0{,}020 - 0{,}750\cos\omega t - 0{,}098\sin\omega t + 0{,}375\cos 2\omega t - 0{,}126\sin 2\omega t \\ & + 0{,}044\cos 3\omega t - 0{,}007\sin 3\omega t - 0{,}012\cos 4\omega t - 0{,}009\cos 5\omega t \\ & + 0{,}004\sin 5\omega t - 0{,}008\cos 6\omega t + 0{,}015\sin 6\omega t\,,\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

bei Beispiel 5c:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(t) = {} & 0{,}017 - 0{,}798\cos\omega t - 0{,}148\sin\omega t + 0{,}502\cos 2\omega t - 0{,}075\sin 2\omega t \\ & + 0{,}020\cos 3\omega t - 0{,}037\sin 3\omega t - 0{,}005\cos 4\omega t + 0{,}008\sin 4\omega t \\ & - 0{,}011\cos 5\omega t - 0{,}008\cos 6\omega t + 0{,}015\sin 6\omega t\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

und bei Beispiel 4a:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(t) = {} & 0{,}020 - 0{,}548\cos\omega t - 0{,}173\sin\omega t + 0{,}428\cos 2\omega t - 0{,}036\sin 2\omega t \\ & - 0{,}005\sin 3\omega t + 0{,}028\cos 3\omega t - 0{,}011\cos 4\omega t - 0{,}008\cos 5\omega t \\ & + 0{,}008\sin 5\omega t - 0{,}005\cos 6\omega t + 0{,}022\sin 6\omega t\,.\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Wie schon in Arbeit I und II sind auch in der vorliegenden Arbeit die Zirkulation und sämtliche Geschwindigkeiten in Einheiten von u_0, alle Kräfte in Einheiten von $\varrho\, u_0^2\, R$ und alle Momente in Einheiten von $\varrho\, u_0^2\, R^2$ angegeben[1].

Die einzelnen Geschwindigkeitsanteile, aus denen sich die resultierende Geschwindigkeit $w = \sqrt{U^2 + V^2}$ (relativ zum Propellerflügel) zusammensetzt, wurden berechnet, wie in Ziff. 8 der Arbeit I angegeben. Nunmehr sind jedoch noch die Geschwindigkeitsanteile u_0^* und v_0^* aus (3) neu hinzugekommen, so daß jetzt

$$U = u_0 + \omega R\sin\omega t + u_f(\omega t) + \sum{}' u_\Gamma(\omega t) + u_0^*(\omega t)\,,$$
$$V = -\omega R\cos\omega t + v_f(\omega t) + \sum{}' v_\Gamma(\omega t) + v_0^*(\omega t)$$

ist. Das Ergebnis der Rechnung ist in den Tabellen 1 bis 4 enthalten. Dabei haben wir die von Arbeit II bekannten und leicht zu übersehenden Geschwindigkeitsanteile $u_\infty = -\omega R\sin\omega t$, $v_\infty = \omega R\cos\omega t$, nicht mehr neu mit aufgenommen.

Tabelle 1. *Beispiel 5a*

ωt	$\Sigma' u_\Gamma$	$\Sigma' v_\Gamma$	u_f	v_f	u_0^*	v_0^*
0°	+ 0,014	— 0,028	+ 0,850	+ 0,071	— 0,160	0,00
30°	— 0,016	— 0,071	+ 0,774	+ 0,059	— 0,164	— 0,034
60°	+ 0,015	— 0,112	+ 0,407	— 0,101	— 0,177	— 0,071
90°	+ 0,042	— 0,114	— 0,167	— 0,294	— 0,208	— 0,111
120°	+ 0,048	— 0,101	+ 0,069	— 0,367	— 0,272	— 0,143
150°	+ 0,036	— 0,096	+ 0,291	— 0,237	— 0,378	— 0,124
180°	+ 0,014	— 0,086	+ 0,372	— 0,011	— 0,444	0,00
210°	— 0,014	— 0,075	+ 0,275	+ 0,227	— 0,378	+ 0,124
240°	— 0,036	— 0,083	+ 0,061	+ 0,295	— 0,272	+ 0,143
270°	— 0,028	— 0,114	— 0,107	+ 0,225	— 0,208	+ 0,111
300°	+ 0,020	— 0,117	+ 0,261	+ 0,078	— 0,177	+ 0,071
330°	+ 0,056	— 0,060	+ 0,632	+ 0,054	— 0,164	+ 0,034

[1] Bei der Durchführung der für die vorliegende Arbeit notwendigen numerischen Rechnungen haben mich Frau *Märzke* und Fräulein *Voigt* (beide Rechner bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin) in dankenswerter Weise unterstützt.

Tabelle 2. *Beispiel 5b*

ωt	$\Sigma' u_\Gamma$	$\Sigma' v_\Gamma$	u_f	v_f	u_0^*	v_0^*
0°	+ 0,014	— 0,030	+ 0,833	+ 0,071	— 0,184	0,00
30°	— 0,019	— 0,074	+ 0,800	+ 0,048	— 0,188	— 0,027
60°	+ 0,015	— 0,117	+ 0,440	— 0,115	— 0,202	— 0,055
90°	+ 0,038	— 0,114	— 0,155	— 0,305	— 0,230	— 0,079
120°	+ 0,044	— 0,103	+ 0,085	— 0,365	— 0,276	— 0,089
150°	+ 0,038	— 0,097	+ 0,299	— 0,220	— 0,332	— 0,065
180°	+ 0,014	— 0,084	+ 0,357	+ 0,003	— 0,360	0,00
210°	— 0,018	— 0,075	+ 0,263	+ 0,213	— 0,332	+ 0,065
240°	— 0,038	— 0,086	+ 0,071	+ 0,286	— 0,276	+ 0,089
270°	— 0,024	— 0,114	— 0,097	+ 0,231	— 0,230	+ 0,079
300°	+ 0,021	— 0,116	+ 0,281	+ 0,090	— 0,202	+ 0,055
330°	+ 0,056	— 0,066	+ 0,618	+ 0,063	— 0,188	+ 0,027

Tabelle 3. *Beispiel 5c*

ωt	$\Sigma' u_\Gamma$	$\Sigma' v_\Gamma$	u_f	v_f	u_0^*	v_0^*
0°	+ 0,018	— 0,026	+ 0,952	+ 0,079	— 0,250	0,00
30°	— 0,014	— 0,070	+ 0,790	+ 0,077	— 0,256	— 0,053
60°	+ 0,018	— 0,115	+ 0,368	— 0,085	— 0,276	— 0,110
90°	+ 0,051	— 0,126	— 0,203	— 0,299	— 0,324	— 0,173
120°	+ 0,062	— 0,110	+ 0,037	— 0,402	— 0,425	— 0,224
150°	+ 0,042	— 0,103	+ 0,297	— 0,296	— 0,590	— 0,193
180°	+ 0,018	— 0,099	+ 0,426	— 0,044	— 0,694	0,00
210°	— 0,005	— 0,086	+ 0,332	+ 0,248	— 0,590	+ 0,193
240°	— 0,032	— 0,086	+ 0,075	+ 0,345	— 0,425	+ 0,224
270°	— 0,033	— 0,126	— 0,129	+ 0,254	— 0,324	+ 0,173
300°	+ 0,024	— 0,132	+ 0,310	+ 0,077	— 0,276	+ 0,110
330°	+ 0,065	— 0,064	+ 0,748	+ 0,046	— 0,256	+ 0,053

Tabelle 4. *Beispiel 4a*

ωt	$\Sigma' u_\Gamma$	$\Sigma' v_\Gamma$	u_f	v_f	u_0^*	v_0^*
0°	+ 0,063	— 0,015	+ 0,998	+ 0,092	— 0,160	0,00
30°	+ 0,039	— 0,022	+ 0,817	+ 0,154	— 0,164	— 0,034
60°	+ 0,019	— 0,091	+ 0,321	— 0,025	— 0,177	— 0,071
90°	+ 0,058	— 0,178	— 0,297	— 0,299	— 0,208	— 0,111
120°	+ 0,128	— 0,206	— 0,017	— 0,483	— 0,272	— 0,143
150°	+ 0,144	— 0,129	+ 0,318	— 0,364	— 0,378	— 0,124
180°	+ 0,052	— 0,069	+ 0,470	— 0,078	— 0,444	0,00
210°	— 0,065	— 0,095	+ 0,374	+ 0,247	— 0,378	+ 0,124
240°	— 0,079	— 0,161	+ 0,109	+ 0,365	— 0,272	+ 0,143
270°	— 0,032	— 0,166	— 0,137	+ 0,285	— 0,208	+ 0,111
300°	+ 0,033	— 0,121	+ 0,384	+ 0,063	— 0,177	+ 0,071
330°	+ 0,054	— 0,054	+ 0,811	+ 0,043	— 0,164	+ 0,034

Mit den Werten der Tabellen 1 bis 4 können ohne weiteres die Geschwindigkeiten U, V und w berechnet werden. Die Richtung von w gibt $\beta = \text{arc tg } V/U$ an (gegen die positive x-Achse gemessen). Das Ergebnis ist in den Tabellen 5 bis 8 zusammengestellt.

Tabelle 5. *Beispiel 5a*

ωt	U	V	w	β	ωt	U	V	w	β
0°	+ 1,705	— 3,957	4,31	— 66,7°	180°	+ 0,942	+ 3,904	4,02	+ 76,4°
30°	+ 3,594	— 3,511	5,02	— 44,3°	210°	— 1,117	+ 3,739	3,90	+ 106,6°
60°	+ 4,709	— 2,283	5,23	— 25,9°	240°	— 2,712	+ 2,356	3,59	+ 139,0°
90°	+ 4,668	— 0,519	4,70	— 6,3°	270°	— 3,343	+ 0,222	3,35	+ 176,2°
120°	+ 4,308	+ 1,389	4,53	+ 17,9°	300°	— 2,360	— 1,968	3,07	— 140,2°
150°	+ 2,949	+ 3,008	4,21	+ 45,6°	330°	— 0,475	— 3,436	3,47	— 97,9°

Tabelle 6. *Beispiel 5b*

ωt	U	V	w	β	ωt	U	V	w	β
0°	+ 1,663	— 3,959	4,29	— 67,2°	180°	+ 1,011	+ 3,919	4,05	+ 75,5°
30°	+ 3,593	— 3,517	5,03	— 44,4°	210°	— 1,088	+ 3,667	3,83	+ 106,5°
60°	+ 4,717	— 2,287	5,24	— 25,9°	240°	— 2,707	+ 2,289	3,55	+ 139,8°
90°	+ 4,653	— 0,497	4,68	— 6,1°	270°	— 3,352	+ 0,196	3,36	+ 176,7°
120°	+ 4,316	+ 1,443	4,55	+ 18,5°	300°	— 2,364	— 1,971	3,08	— 140,2°
150°	+ 3,006	+ 3,082	4,30	+ 45,7°	330°	— 0,514	— 3,440	3,48	— 98,5°

Tabelle 7. *Beispiel 5c*

ωt	U	V	w	β	ωt	U	V	w	β
0°	+ 1,720	— 3,947	4,31	— 66,5°	180°	+ 0,750	+ 3,857	3,93	+ 79,0°
30°	+ 3,520	— 3,511	4,97	— 44,9°	210°	— 1,263	+ 3,819	4,02	+ 108,3°
60°	+ 4,573	— 2,310	5,12	— 26,8°	240°	— 2,847	+ 2,483	3,78	+ 138,9°
90°	+ 4,523	— 0,598	4,56	— 7,5°	270°	— 3,487	+ 0,301	3,50	+ 175,1°
120°	+ 4,138	+ 1,264	4,33	+ 17,0°	300°	— 2,407	— 1,945	3,09	— 141,1°
150°	+ 2,749	+ 2,872	3,98	+ 46,3°	330°	— 0,443	— 3,428	3,46	— 97,4°

Tabelle 8. *Beispiel 4a*

ωt	U	V	w	β	ωt	U	V	w	β
0°	+ 1,901	— 3,923	4,36	— 64,1°	180°	+ 1,078	+ 3,853	4,00	+ 74,4°
30°	+ 3,693	— 3,367	5,00	— 42,4°	210°	— 1,069	+ 3,740	3,89	+ 105,9°
60°	+ 4,627	— 2,187	5,12	— 25,3°	240°	— 2,707	+ 2,348	3,58	+ 139,1°
90°	+ 4,553	— 0,588	4,59	— 7,3°	270°	— 3,377	+ 0,230	3,38	+ 176,1°
120°	+ 4,304	+ 1,168	4,46	+ 15,2°	300°	— 2,224	— 1,988	2,98	— 138,2°
150°	+ 3,084	+ 2,847	4,20	+ 42,7°	330°	— 0,299	— 3,442	3,45	— 95,0°

Für die Berechnung der resultierenden Kräfte an den Propellerflügeln haben wir wie in Tabelle 32 und 23 der Arbeit II angenommen, daß der Druckmittelpunkt mit dem Profilmittelpunkt zusammenfalle. (Abgerundete symmetrische Profile).

Tabelle 9. *Beispiel 5a*

Mittelpunkt des Flügelprofiles	Profilzirkulation Γ	Größe der result. Kraft K	Richtung der result. Kraft K	K_x	K_y	M
0°	— 0,301	1,297	— 156,7°	— 1,19	— 0,51	— 0,51
30°	— 0,555	2,786	— 134,3°	— 1,95	— 1,99	— 0,75
60°	— 0,790	4,131	— 115,9°	— 1,80	— 3,71	— 0,30
90°	— 0,481	2,260	— 96,3°	— 0,25	— 2,24	+ 0,25
120°	+ 0,226	1,024	+ 107,9°	— 0,32	+ 0,98	— 0,21
150°	+ 0,892	3,755	+ 135,6°	— 2,68	+ 2,63	— 0,94
180°	+ 1,135	4,563	+ 166,4°	— 4,43	+ 1,07	— 1,07
210°	+ 0,843	3,288	— 163,4°	— 3,15	— 0,94	— 0,76
240°	+ 0,201	0,721	— 131,0°	— 0,47	— 0,54	— 0,14
270°	— 0,301	1,008	+ 86,2°	+ 0,07	+ 1,01	+ 0,07
300°	— 0,399	1,225	+ 129,8°	— 0,79	+ 0,95	— 0,21
330°	— 0,231	0,802	+ 172,1°	— 0,79	+ 0,11	— 0,30

Tabelle 10. *Beispiel 5b*

Mittelpunkt des Flügelprofiles	Profilzirkulation Γ	Größe der result. Kraft K	Richtung der result. Kraft K	K_x	K_y	M
0°	— 0,340	1,459	— 157,2°	— 1,35	— 0,57	— 0,57
30°	— 0,583	2,932	— 134,4°	— 2,05	— 2,09	— 0,78
60°	— 0,790	4,139	— 115,9°	— 1,81	— 3,72	— 0,30
90°	— 0,446	2,087	— 96,1°	— 0,22	— 2,07	+ 0,22
120°	+ 0,275	1,251	+ 108,5°	— 0,40	+ 1,19	— 0,25
150°	+ 0,918	3,947	+ 135,7°	— 2,83	+ 2,76	— 0,98
180°	+ 1,090	4,415	+ 165,5°	— 4,27	+ 1,11	— 1,11
210°	+ 0,808	3,094	— 163,5°	— 2,97	— 0,88	— 0,72
240°	+ 0,233	0,827	— 130,2°	— 0,53	— 0,63	— 0,14
270°	— 0,272	0,914	+ 86,7°	+ 0,05	+ 0,91	+ 0,05
300°	— 0,395	1,217	+ 129,8°	— 0,78	+ 0,94	— 0,20
330°	— 0,257	0,894	+ 171,5°	— 0,88	+ 0,13	— 0,33

In den Tabellen 9 bis 12 sind die Profilzirkulation, die Kräfte an den Propellerflügeln (nach Größe und Richtung, bzw. zerlegt in ihre x- und y-Komponente) sowie das Drehmoment nach Formel (II, 2) enthalten.

Tabelle 11. *Beispiel 5c*

Mittelpunkt des Flügelprofiles	Profilzirkulation Γ	Größe der result. Kraft K	Richtung der result. Kraft K	K_x	K_y	M
0°	— 0,283	1,220	— 156,5°	— 1,12	— 0,49	— 0,49
30°	— 0,572	2,843	— 134,9°	— 2,01	— 2,01	— 0,74
60°	— 0,864	4,424	— 116,8°	— 2,00	— 3,95	— 0,25
90°	— 0,593	2,704	— 97,5°	— 0,35	— 2,68	+ 0,35
120°	+ 0,129	0,559	+ 107,0°	— 0,16	+ 0,54	— 0,13
150°	+ 0,907	3,610	+ 136,3°	— 2,61	+ 2,50	— 0,86
180°	+ 1,295	5,090	+ 169,0°	— 5,00	+ 0,97	— 0,97
210°	+ 1,013	4,072	— 161,7°	— 3,87	— 1,28	— 0,83
240°	+ 0,241	0,911	— 131,1°	— 0,60	— 0,68	— 0,18
270°	— 0,371	1,299	+ 85,1°	+ 0,11	+ 1,29	+ 0,11
300°	— 0,464	1,434	+ 128,9°	— 0,90	+ 1,12	— 0,22
330°	— 0,234	0,810	+ 172,6°	— 0,80	+ 0,11	— 0,31

Tabelle 12. *Beispiel 4a*

Mittelpunkrt des Flügelprofiles	Profilzirkulation Γ	Größe der result. Kraft K	Richtung der result. Kraft K	K_x	K_y	M
0°	— 0,096	0,419	— 154,1°	— 0,38	— 0,18	— 0,18
30°	— 0,342	1,710	— 132,4°	— 1,15	— 1,26	— 0,52
60°	— 0,687	3,517	— 115,3°	— 1,50	— 3,18	— 0,29
90°	— 0,574	2,634	— 97,3°	— 0,34	— 2,61	+ 0,34
120°	+ 0,013	0,058	+ 105,2°	— 0,02	+ 0,06	— 0,02
150°	+ 0,656	2,755	+ 132,7°	— 1,87	+ 2,03	— 0,82
180°	+ 0,960	3,840	+ 164,4°	— 3,70	+ 1,03	— 1,03
210°	+ 0,769	2,991	— 164,1°	— 2,88	— 0,82	— 0,73
240°	+ 0,238	0,852	— 130,9°	— 0,56	— 0,64	— 0,16
270°	— 0,254	0,859	+ 86,1°	+ 0,06	+ 0,86	+ 0,06
300°	— 0,312	0,930	+ 131,8°	— 0,62	+ 0,69	— 0,19
330°	— 0,105	0,363	+ 175,0°	— 0,36	+ 0,03	— 0,15

Damit ergeben sich für die resultierenden Gesamtkräfte und das Gesamtmoment der behandelten Voith-Schneider-Propeller folgende Werte (Mittelwerte der drei bzw. zwei aus den Tabellen berechenbaren Propellerstellungen $0, \pi/6$ und $\pi/3$ bzw. 0 und $\pi/6$):

Beispiel 5a: $K_x^{(P)} = -5{,}92\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K_y^{(P)} = -1{,}06\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K^{(P)} = 6{,}01\,\varrho\,u_0^2\,R$,
Richtung: $\beta_K = -169{,}9°$, $M^{(P)} = -1{,}62\,\varrho\,u_0^2\,R^2$.

Beispiel 5b: $K_x^{(P)} = -6{,}01\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K_y^{(P)} = -0{,}97\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K^{(P)} = 6{,}09\,\varrho\,u_0^2\,R$,
Richtung: $\beta_K = -170{,}8°$, $M^{(P)} = -1{,}70\,\varrho\,u_0^2\,R^2$,

Beispiel 5c: $K_x^{(P)} = -6{,}44\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K_y^{(P)} = -1{,}52\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K^{(P)} = 6{,}62\,\varrho\,u_0^2\,R$,
Richtung: $\beta_K = -166{,}7°$, $M^{(P)} = -1{,}50\,\varrho\,u_0^2\,R^2$,

Beispiel 4a: $K_x^{(P)} = -6{,}66\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K_y^{(P)} = -1{,}99\,\varrho\,u_0^2\,R$, $K^{(P)} = 6{,}95\,\varrho\,u_0^2\,R$,
Richtung: $\beta_K = -163{,}4°$, $M^{(P)} = -1{,}85\,\varrho\,u_0^2\,R^2$.

Bei der Berechnung des Wirkungsgrades ist die effektive Fortschrittsgeschwindigkeit des Propellers gegenüber dem umgebenden Wasser (d. h. unter Berücksichtigung des vom Schiffskörper hervorgerufenen Nachstromes) einzusetzen. Wir haben somit an Stelle von (II, 3)

$$\eta = \frac{K^{(P)}\,u_0\,(1-\Lambda)}{M^{(P)}\,\omega}. \tag{35}$$

Nun ergibt sich aus (6), (7) folgende mittlere Nachstromziffer $\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$:

Beispiel 5a: $\Lambda = 0{,}243$, Beispiel 5b: $\Lambda = 0{,}247$,
Beispiel 5c: $\Lambda = 0{,}379$, Beispiel 4a: $\Lambda = 0{,}243$.

Und damit erhalten wir nach (35) folgende Wirkungsgrade:

Beispiel 5a: $\eta = 0{,}70$, Beispiel 5b: $\eta = 0{,}67$,
Beispiel 5c: $\eta = 0{,}68$, Beispiel 4a: $\eta = 0{,}71$.

In Abb. 3, 4, 5, 6 sind die Zirkulationsverteilungen der behandelten Beispiele dargestellt; zum Vergleich ist die Zirkulationsverteilung der entsprechenden freifahrenden Propeller aus Arbeit II

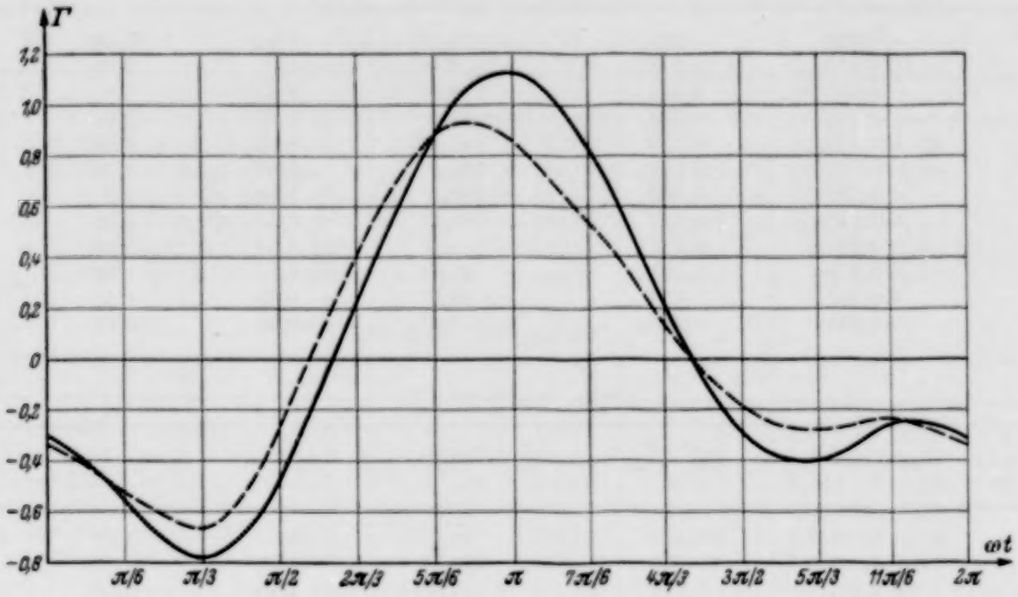

Abb. 3. Beispiel 5a: Zirkulationsverteilung Γ (glatt); und zum Vergleich die Zirkulationsverteilung des freifahrenden Propellers Beispiel 5 (gestrichelt).

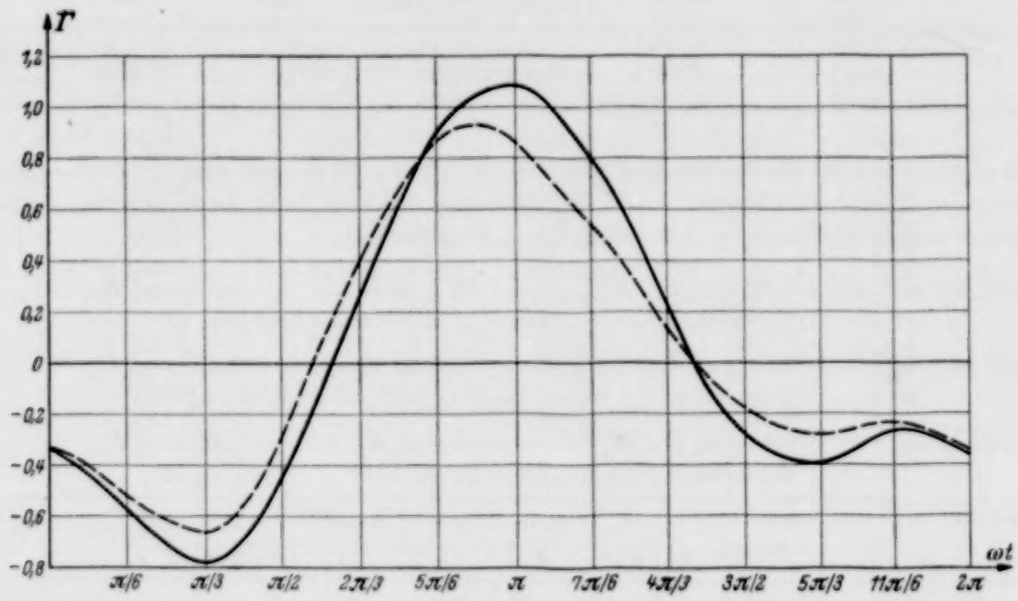

Abb. 4. Beispiel 5b: Zirkulationsverteilung Γ (glatt); und zum Vergleich die Zirkulationsverteilung des freifahrenden Propellers Beispiel 5 (gestrichelt).

gestrichelt eingezeichnet. Streng genommen ist ein solcher Vergleich nicht möglich, denn durch das Einbringen des Schiffsrumpfes verringert sich der effektive Fortschrittsgrad des Propellers um den Faktor $(1 - A)$, beträgt also nur noch $(u_0/R\omega)(1 - A)$.

Vielfach wird deshalb auch bei Anwesenheit eines Schiffsrumpfes der Propeller als „freifahrend" berechnet, jedoch mit dem effektiven Fortschrittsgrad $(u_0/R\omega)(1 - A)$ unter Berücksichtigung des mittleren Nachstromes.

Eine überschlägige Abschätzung zeigt[1], daß bei den Propellern der Beispiele 4 und 5 (Arbeit II) die Berechnung „freifahrend", aber mit dem effektiven Fortschrittsgrad unter Berücksichtigung des Nachstromes folgende Steigerung der resultierenden Vortriebskraft $K^{(P)}$ geben würde:

Bei Nachstromziffer $\Lambda = 0{,}25$: Kraftsteigerung $\sim 25\%$,

bei Nachstromziffer $\Lambda = 0{,}38$: Kraftsteigerung $\sim 38\%$

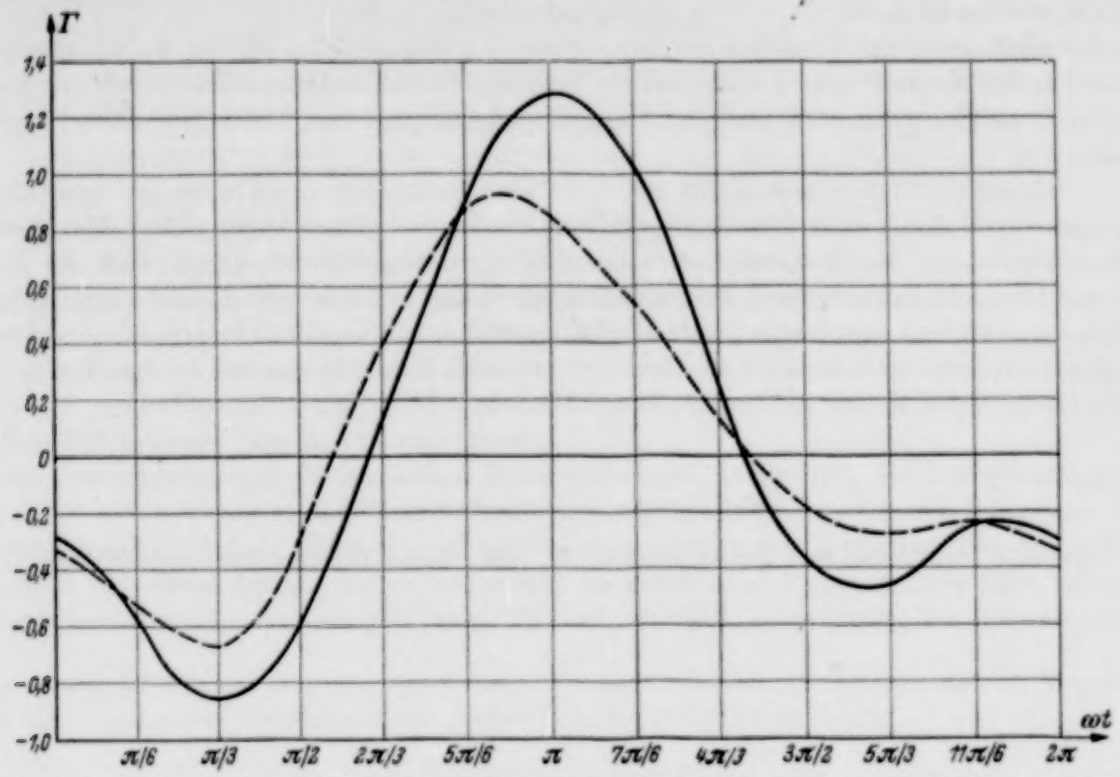

Abb. 5. Beispiel 5c: Zirkulationsverteilung Γ (glatt); und zum Vergleich die Zirkulationsverteilung des freifahrenden Propellers Beispiel 5 (gestrichelt).

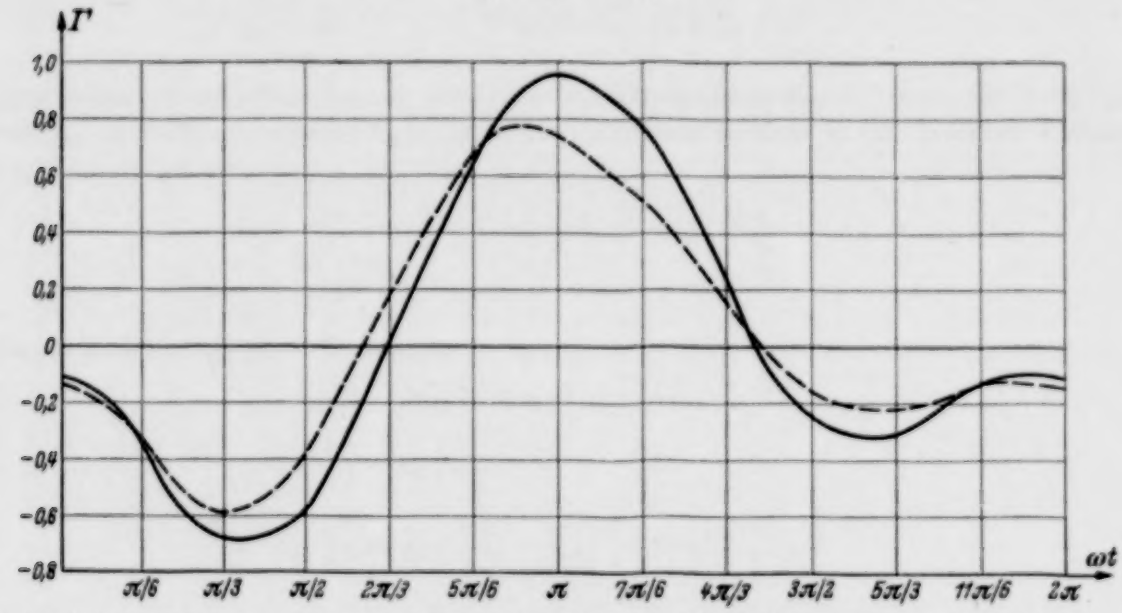

Abb. 6. Beispiel 4a: Zirkulationsverteilung Γ (glatt); und zum Vergleich die Zirkulationsverteilung des freifahrenden Propellers Beispiel 4 (gestrichelt).

[1] Man kann etwa so rechnen: Für die Größe von Γ ist der Hauptanteil $[(\omega R/u_0)(r_0'/R) - 1]\, u_0$ der linken Seite der entsprechenden Integralgleichung maßgebend. Die Verkleinerung des Fortschrittgrades um den Faktor $1 - \Lambda$ gegenüber einer bereits vorliegenden Vergleichsrechnung vergrößert Γ etwa um den Faktor

$$\frac{\left[\dfrac{\omega R}{u_0(1-\Lambda)}\,\dfrac{r_0'}{R} - 1\right] u_0 (1-\Lambda)}{\left(\dfrac{\omega R}{u_0}\,\dfrac{r_0'}{R} - 1\right) u_0} = 1 + \frac{\Lambda}{\left(\dfrac{\omega R}{u_0}\,\dfrac{r_0'}{R} - 1\right)}.$$

Dann vergrößert sich auch die resultierende Vortriebskraft $K^{(P)}$ um den gleichen Faktor da bei der resultierenden Geschwindigkeit w der unverändert bleibende Anteil der Umfangsgeschwindigkeit überwiegt (gemessen in den Einheiten $\varrho\, u_0^2\, R$ der vorliegenden Vergleichsrechnung). Mit den Beispielen 4 und 5 (Arbeit II) als Vergleichsrechnung ergibt sich sofort die behauptete Kraftsteigerung.

gegenüber den Ergebnissen von Beispiel 4 und 5. Wie man erkennt, lieferte unsere Theorie der wirklichen Berücksichtigung des Schiffskörpers in den Beispielen 5a, 5b, 5c, 4a fast dieselben Vortriebskräfte. Diese Theorie ist trotzdem nicht überflüssig, wie man zunächst vielleicht glauben könnte. Denn es gibt mehrere Schiffsrumpfanordnungen mit gleichen Nachstromziffern (z. B. 5a und 5b), deren feinere Unterschiede (vgl. unsere Ergebnisse) mit der Theorie des freifahrenden Propellers nicht erfaßt werden können.

Grundsätzlich zeigt ein Vergleich der Ergebnisse der Beispiele 5a, 5b, 5c, 4a mit denen der Beispiele 5 und 4, daß der in Punkt 4 der Arbeit II besprochene Ablenkungseffekt durch den Einfluß des Schiffskörpers größer geworden und der Gesamtwirkungsgrad des Voith-Schneider-Propellers gesunken ist.

7. Zusammenfassung. In der vorliegenden, im Institut für Angewandte Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin durchgeführten Arbeit wird die in den Arbeiten I und II entwickelte Theorie des freifahrenden Voith-Schneider-Propellers ergänzt, indem der Einfluß eines vor dem Propeller liegenden Schiffsrumpfes mit berücksichtigt wird. Die vorliegende Theorie fügt sich organisch in die bisherige der Arbeiten I und II ein; sie wird an einigen Zahlenbeispielen erprobt und liefert befriedigende Ergebnisse.

(Eingegangen am 7. November 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. habil. *W. Isay*, Berlin-Dahlem, Schweinfurthstr. 90.

Kritische Drehzahlen gewisser Rotorformen unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung*

II. Mitteilung

Von **L. Fehrle**

1. Einleitung. In einer vorhergehenden Arbeit[1] — im folgenden mit I bezeichnet — wurden durch Verallgemeinerung eines von *R. Grammel*[2] entwickelten Verfahrens algebraische Gleichungen hergeleitet, die die angenäherte Berechnung der kritischen Drehzahlen von endseitig zweifach kugelig gelagerten Wellen konstanter Biegesteifigkeit mit kontinuierlicher Scheibenverteilung unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung ermöglichen. Für die damit gewonnenen Näherungslösungen sowie die zum Vergleich herangezogenen *Ritz*schen Lösungen[3] wurden verschiedene Aussagen gemacht, die z. T. exakt beweisbar sind, z. T. durch die bei der Durchrechnung verschiedener Beispiele gesammelten Erfahrungen ihre Bestätigung fanden.

Diese in I durchgeführten theoretischen Untersuchungen sollen mit der Durchrechnung eines Beispiels, für das sich wegen seiner verhältnismäßig einfachen Art die strengen Lösungen angeben lassen, ihren Abschluß finden. Hierbei wird auch der weniger interessante Fall der Kreiselwirkung bei synchroner Präzession im Gegenlauf behandelt, da sich die in I angestellten Überlegungen auf andere Eigenwertprobleme, die vom gleichen Typ sind wie die hier auftretenden, übertragen lassen.

2. Die strenge Lösung des Eigenwertproblems. Bei dem als Beispiel[4] ausgewählten Rotor handelt es sich um eine sogenannte Zweifelderwelle, deren Scheibenverteilung durch

$$\varrho_\varkappa \equiv \varrho_0 = \text{konstant in } \alpha = 0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2} = \beta\,,$$

$$\varrho_\lambda \equiv 0 \qquad\qquad \text{in } \beta = \frac{1}{2} \leqq \xi \leqq 1$$

(I, Abb. 2) gegeben ist. Die Berechnung der kritischen Drehzahlen dieses Rotors für berücksichtigte Kreiselwirkung im Falle synchroner Präzession im Gleichlauf besteht in der exakten Auflösung des durch die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \eta_\varkappa^{(4)} - \frac{1}{4}\,u\,\varrho_\varkappa^4\,\eta_\varkappa'' - u\,\varrho_\varkappa^2\,\eta_\varkappa &= 0\,,\\ \eta_\lambda^{(4)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und die Rand- und Übergangsbedingungen

$$\eta_\varkappa(0) = \eta_\varkappa''(0) = \eta_\lambda(1) = \eta_\lambda''(1) = 0\,, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\eta_\varkappa\left(\frac{1}{2}\right) = \eta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right),\\ &\eta_\varkappa'\left(\frac{1}{2}\right) = \eta_\lambda'\left(\frac{1}{2}\right), \quad \eta_\varkappa''\left(\frac{1}{2}\right) = \eta_\lambda''\left(\frac{1}{2}\right),\\ &\eta_\varkappa'''\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\,u\,\varrho_\varkappa^4\,\eta_\varkappa'\left(\frac{1}{2}\right) = \eta_\lambda'''\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

definierten Eigenwertproblems [I: (17a), (19), (20), (26a)]. Wegen $\varrho_\varkappa$ = konst. lauten die allgemeinen Lösungen von (1)

$$\left.\begin{aligned} \eta_\varkappa &= A_\varkappa\,\mathfrak{Cof}\,\varkappa_1\,\xi + B_\varkappa\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa_1\,\xi + C_\varkappa\cos\varkappa_2\,\xi + D_\varkappa\sin\varkappa_2\,\xi\,,\\ \eta_\lambda &= A_\lambda\,(\xi-1)^3 + B_\lambda\,(\xi-1)^2 + C_\lambda\,(\xi-1) + D_\lambda \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

* Auszug aus der Frankfurter Dissertation. 1. Referent Prof. Dr.-Ing. *K. Karas*, 2. Referent Prof. Dr. *R. Moufang*.

[1] *L. Fehrle*, Ing.-Archiv 24 (1956) S. 111.

[2] *R. Grammel*, Ing.-Archiv 10 (1939) S. 35.

[3] *K. Karas*, Die kritischen Drehzahlen wichtiger Rotorformen, Wien 1935.

[4] s. Fußnote 3.

mit $$\varkappa_1 = \sqrt{\frac{w_\varkappa}{2} + \sqrt{\frac{w_\varkappa^2}{4} + u_\varkappa}}\,, \qquad \varkappa_2 = \sqrt{-\frac{w_\varkappa}{2} + \sqrt{\frac{w_\varkappa^2}{4} + u_\varkappa}}\,,$$

$$w_\varkappa = \frac{1}{4}\, u\, \varrho_\varkappa^4\,, \quad u_\varkappa = u\, \varrho_\varkappa^2\,, \quad u \equiv \text{Eigenwert [I: (5)]}\,.$$

Die acht Integrationskonstanten $A_\varkappa, \cdots, D_\lambda$ sind so zu bestimmen, daß die Lösungen (4) den Bedingungen (2) und (3) genügen. Auf die Wiedergabe dieser Rechnung — sie läuft auf die Auflösung eines linearen homogenen Gleichungssystems hinaus, dessen verschwindende Koeffizientendeterminante eine transzendente Gleichung für die gesuchten Eigenwerte darstellt — soll hier verzichtet und sogleich das Endergebnis angegeben werden:

$$\left.\begin{aligned} \Delta = {} & 6\,\varkappa_1\,\varkappa_2\,(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\varkappa_1}{2}\cos\frac{\varkappa_2}{2} + 24\,(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\varkappa_1}{2}\sin\frac{\varkappa_2}{2} + \\ & + \varkappa_1^2\,\varkappa_2\,(24 + \varkappa_1^2)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\varkappa_1}{2}\cos\frac{\varkappa_2}{2} + \varkappa_1\,\varkappa_2^2\,(24 - \varkappa_2^2)\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\varkappa_1}{2}\sin\frac{\varkappa_2}{2} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Für berücksichtigte Kreiselwirkung im Falle synchroner Präzession im Gegenlauf lauten die Differentialgleichungen, Rand- und Übergangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \eta_\varkappa^{(4)} + \frac{3}{4}\, u\, \varrho_\varkappa^4\, \eta_\varkappa'' - u\, \varrho_\varkappa^2\, \eta_\varkappa = 0\,, \\ \eta_\lambda^{(4} \qquad\qquad\qquad\qquad = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\eta_\varkappa(0) = \eta_\varkappa''(0) = \eta_\lambda(1) = \eta_\lambda''(1) = 0\,, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} & \eta_\varkappa\left(\frac{1}{2}\right) = \eta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right), \\ & \eta_\varkappa'\left(\frac{1}{2}\right) = \eta_\lambda'\left(\frac{1}{2}\right), \quad \eta_\varkappa''\left(\frac{1}{2}\right) = \eta_\lambda''\left(\frac{1}{2}\right), \\ & \eta_\varkappa'''\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}\, u\, \varrho_\varkappa^4\, \eta_\varkappa'\left(\frac{1}{2}\right) = \eta_\lambda'''\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

[I: (17b), (19), (20), (26b)].

Auf dem gleichen Wege wie bei synchroner Präzession im Gleichlauf erhält man als Endresultat ebenfalls Gleichung (5), wobei jetzt $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ wie folgt definiert sind:

$$\varkappa_1 = \sqrt{-\frac{3}{2}\, w_\varkappa + \sqrt{\frac{9}{4}\, w_\varkappa^2 + u_\varkappa}}\,, \qquad \varkappa_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\, w_\varkappa + \sqrt{\frac{9}{4}\, w_\varkappa^2 + u_\varkappa}}\,.$$

Aus (5) erhält man sogleich die entsprechende Gleichung für unberücksichtigte Kreiselwirkung, wenn man dort (da $w_\varkappa \equiv 0$) $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa = \sqrt[4]{u_\varkappa}$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \Delta = {} & 12\,\varkappa^2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\varkappa}{2}\cos\frac{\varkappa}{2} + 48\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\varkappa}{2}\sin\frac{\varkappa}{2} + \\ & + \varkappa\,(24 + \varkappa^2)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\varkappa}{2}\cos\frac{\varkappa}{2} + \varkappa\,(24 - \varkappa^2)\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\varkappa}{2}\sin\frac{\varkappa}{2} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die beiden ersten (kleinsten) Wurzeln der Gleichung (9) bzw. (5) sind für beliebige Werte $\varrho_\varkappa = \varrho_0$ bzw. $\varrho_\varkappa = 1/3$ und $\varrho_\varkappa = 1/10$ in den Tabellen des Abschnittes 4 angegeben.

3. Näherungsansatz und -gleichungen. Für die angenäherte Auflösung eines Eigenwertproblems ist es vorteilhaft, wenn man von vornherein den ungefähren Verlauf der Eigenfunktionen kennt, da damit die an ein Näherungsverfahren gestellte Forderung, ein Höchstmaß an Genauigkeit bei verhältnismäßig geringer Rechenarbeit zu erreichen, leichter zu erfüllen ist.

Die p-te Eigenfunktion einer zweifach kugelig gelagerten Welle besitzt p-1 Nullstellen (Knoten) zwischen den Lagern, deren Lage von der Massenverteilung abhängig ist. Die Untersuchungen dieser Arbeit beschränken sich auf die Ermittlung der beiden ersten Eigenwerte (Grund- und erste Oberschwingung) des im Abschnitt 2 genannten Beispiels unter Verwendung eines zweigliedrigen Näherungsansatzes [I: S. 118], dessen Funktionen[1]

$$v_1 = \xi - 2\,\xi^3 + \xi^4\,, \qquad v_2 = 7\,\xi - 10\,\xi^3 + 3\,\xi^5$$

[1] s. Fußnote 3, S. 319.

linear unabhängig sind und den geometrischen und dynamischen Randbedingungen

$$v_j(0) = v_j(1) = v_j''(0) = v_j''(1) = 0\,, \qquad j = 1, 2 \tag{10}$$

genügen. Beide Funktionen sind, da $v_j \neq 0$ in $0 < \xi < 1$, Annäherungen an die erste Eigenfunktion (Grundschwingung).

Über die mit diesem Ansatz für berücksichtigte und unberücksichtigte Kreiselwirkung aus den Gleichungen I (40), (40a), (40b), (43), (43a) und (43b) gewonnenen Lösungen ist folgendes zu sagen, wobei zur Abkürzung das *Ritz*sche Verfahren[1] als „Fall *Ritz*", das *Grammel*sche Verfahren[2] bzw. dessen in I durchgeführte Verallgmeinerung als „Fall *Grammel*" bezeichnet werden:

a) Lineare Gleichungen. Bildet man mit v_1 bzw. v_2 den eingliedrigen Ansatz, so lassen sich damit zwei voneinander unabhängige Näherungen für den ersten Eigenwert berechnen:

$$\left.\begin{aligned} \textit{Ritz}\colon\ \bar{u}_1(1) &= \frac{F_{11}}{A_{11}}\,, & \bar{u}_1(2) &= \frac{F_{22}}{A_{22}}\,, \\ \textit{Grammel}\colon\ \bar{u}_1(1) &= \frac{A_{11}}{B_{11}}\,, & \bar{u}_1(2) &= \frac{A_{22}}{B_{22}} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

(unberücksichtigte Kreiselwirkung), wobei die in Klammern stehenden Zahlen darauf hinweisen sollen, mit welcher Funktion (v_1 oder v_2) des Ansatzes die Rechnung durchgeführt wurde. Es wurden hier bewußt für beide Methoden die gleichen Bezeichnungen gewählt; eine Verwechslung ist jedoch ausgeschlossen, da aus den für das Beispiel aufgestellten Tabellen (Abschnitt 4) stets hervorgeht, nach welchem Verfahren die Lösungen berechnet wurden. Entsprechende Gleichungen erhält man für berücksichtigte Kreiselwirkung, wenn man in (11) A_{jj} durch A_{jj}^{*} bzw. A_{jj}^{**} und B_{jj} durch B_{jj}^{*} bzw. B_{jj}^{**} ersetzt [I: (38), (41), (41a), (41b)].

b) Quadratische Gleichungen: Die dem zweigliedrigen Ansatz entsprechenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \textit{Ritz}\colon\ & (F_{11} - \bar{u}\,A_{11})\,(F_{22} - \bar{u}\,A_{22}) - (F_{12} - \bar{u}\,A_{12})^2 = 0\,, \\ \textit{Grammel}\colon\ & (A_{11} - \bar{u}\,B_{11})\,(A_{22} - \bar{u}\,B_{22}) - (A_{12} - \bar{u}\,B_{12})^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(unberücksichtigte Kreiselwirkung; die entsprechenden Gleichungen für berücksichtigte Kreiselwirkung erhält man, indem man wieder anstelle von A_{ik} und B_{ik} die für synchrone Präzession im Gleich- bzw. Gegenlauf definierten Größen einsetzt) liefern die Lösungen

$$\bar{u}_1\,(1, 2)\,, \qquad \bar{u}_2\,(1, 2)\,, \tag{13}$$

von denen die erste eine im allgemeinen gegenüber (11) verschärfte Annäherung an den ersten Eigenwert, die zweite eine erste Näherung für den zweiten Eigenwert ist. Da in (12) keiner der Linearfaktoren vor den anderen bevorzugt ist, ergibt sich hieraus eine weitere Annäherung an den ersten Eigenwert[3]

$$\left.\begin{aligned} \textit{Ritz}\colon\ \bar{u}_1(g) &= \frac{F_{12}}{A_{12}}\,, \\ \textit{Grammel}\colon\ \bar{u}_1(g) &= \frac{A_{12}}{B_{12}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Der in Klammern bei $\bar{u}_1$ stehende Buchstabe g (= gemischt) soll zum Ausdruck bringen, daß dieses Resultat als Quotient der Glieder mit gemischten Indizes entstanden ist. Gleichung (14) gilt in entsprechender Form für berücksichtigte Kreiselwirkung.

4. Die angenäherte Auflösung des Eigenwertproblems. Zur Auswertung der Gleichungen (11) und (12) sind für das in Abschnitt **2** angegebene Beispiel ($\varrho_\varkappa \equiv \varrho_0$, $\varrho_\lambda \equiv 0$) die Größen F_{ik}, A_{ik} und K_{ik} $(i, k = 1, 2)$ mit den Funktionen v_1 und v_2 des Näherungsansatzes wie folgt zu berechnen:

$$F_{ik} = \int_0^1 v_i''\, v_k''\, d\xi\,, \qquad A_{ik} = \varrho_0^2 \int_0^{1/2} v_i\, v_k\, d\xi\,, \qquad K_{ik} = \varrho_0^4 \int_0^{1/2} v_i'\, v_k'\, d\xi\,,$$

$$A_{ik}^{*} = A_{ik} - \frac{1}{4}\,K_{ik}\,, \qquad A_{ik}^{**} = A_{ik} + \frac{3}{4}\,K_{ik}\,,$$

(ein Stern soll wieder auf synchrone Präzession im Gleichlauf, zwei Sterne auf synchrone Präzession im Gegenlauf hinweisen).

[1] s. Fußnote 3, S. 319.
[2] s. Fußnote 2, S. 319.
[3] s. Fußnote 3, S. 319.

Zur Berechnung der Größen B_{ik}, B_{ik}^{*} und B_{ik}^{**} [I: (41), (41a), (41b)] sind die nach den Methoden der Statik zu bestimmenden Biegemomente heranzuziehen.

Für unberücksichtigte Kreiselwirkung ist das zu der in $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ kontinuierlich verteilten „Fliehkraftbelastung" (Abb. 1) [I: S. 121]

$$q_j^0(\xi) = \varrho_0^2 v_j(\xi) \qquad (j = 1, 2)\,,$$

gehörige Biegemoment zu berechnen. Der Index 0 besagt, daß es sich um reine „Fliehkraftbelastung" handelt. Bezeichnet man mit

$$G_j^0 = \varrho_0^2 \int_0^{1/2} v_j(\xi)\, d\xi$$

das Gewicht und mit s_j^0 die Abszisse des Schwerpunktes dieser Belastung, so ergeben sich für die Auflagerreaktionen $\mathfrak{A}_j^0$ und $\mathfrak{B}_j^0$ die Werte

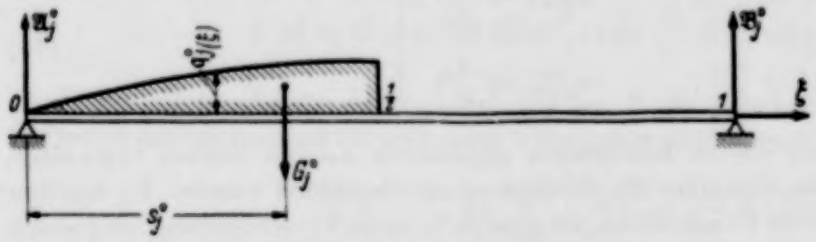

Abb. 1. Fliehkraftbelastung.

$$\mathfrak{A}_j^0 = G_j^0\,(1 - s_j^0)\,,$$

$$\mathfrak{B}_j^0 = G_j^0\, s_j^0 = \varrho_0^2 \int_0^{1/2} \xi\, v_j(\xi)\, d\xi\,.$$

Für das Biegemoment M_j^0 erhält man sodann nach kurzer Zwischenrechnung die nachstehenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ \text{Feld}\left(0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right):\ M_j^0(\xi) = \mathfrak{A}_j^0 \cdot \xi - \varrho_0^2\, \xi \int_0^{\xi} v_j(z)\, dz + \varrho_0^2 \int_0^{\xi} z\, v_j(z)\, dz\,, \\ &2.\ \text{Feld}\left(\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1\right) \quad M_j^0(\xi) = \mathfrak{B}_j^0\,(1 - \xi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Für berücksichtigte Kreiselwirkung ist im Falle synchroner Präzession im Gleichlauf

$$q_j^{*}(\xi) = \varrho_0^2 v_j(\xi) + \frac{1}{4}\varrho_0^4 v_j''(\xi) = q_j^0(\xi) + \frac{1}{4}\varrho_0^4 v_j''(\xi) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}\,,$$

$$P_{\alpha j}^{*} = \frac{1}{4}\varrho_0^4 v_j'(0) \text{ in } \xi = \alpha = 0\,, \qquad P_{\beta j}^{*} = -\frac{1}{4}\varrho_0^4 v_j'\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{für} \quad \xi = \beta = \frac{1}{2}\,,$$

im Falle synchroner Präzession im Gegenlauf

$$q_j^{**}(\xi) = \varrho_0^2 v_j(\xi) - \frac{3}{4}\varrho_0^4 v_j''(\xi) = q_j^0(\xi) - \frac{3}{4}\varrho_0^4 v_j''(\xi) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}\,,$$

$$P_{\alpha j}^{**} = -\frac{3}{4}\varrho_0^4 v_j'(0) \text{ in } \xi = \alpha = 0\,, \qquad P_{\beta j}^{**} = \frac{3}{4}\varrho_0^4 v_j'\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{für} \quad \xi = \beta = \frac{1}{2}\,.$$

Zerlegt man diese Belastungen in ihren „Fliehkraft"- und „Kreiselmomentenanteil", so lassen sich nach dem Superpositionsprinzip für beide getrennt die Biegemomente angeben. Dasjenige für reine „Fliehkraftbelastung" wurde schon oben [Gl. (15)] berechnet, so daß jetzt nur noch das zur Belastung

$$q_j^{k*}(\xi) = \frac{1}{4}\varrho_0^4 v_j''(\xi) \text{ für } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \quad \text{(Gleichlauf)}\,,$$

$$P_{\alpha j}^{*} = \frac{1}{4}\varrho_0^4 v_j'(0) \text{ für } \xi = 0\,,$$

$$P_{\beta j}^{*} = -\frac{1}{4}\varrho_0^4 v_j'\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{für} \quad \xi = \frac{1}{2}$$

bzw.

$$q_j^{k**}(\xi) = -\frac{3}{4}\varrho_0^4 v_j''(\xi) \text{ für } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \quad \text{(Gegenlauf)}\,,$$

$$P_{\alpha j}^{**} = -\frac{3}{4}\varrho_0^4 v_j'(0) \text{ für } \xi = 0\,,$$

$$P_{\beta j}^{**} = \frac{3}{4}\varrho_0^4 v_j'\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{für} \quad \xi = \frac{1}{2}$$

(der Index k weist darauf hin, daß es sich um reine „Kreiselmomentenbelastung" handelt) gehörende Biegemoment zu berechnen ist. Die Gesamtbelastung (k) im Falle synchroner Präzession im Gegen-

lauf geht aus derjenigen für synchrone Präzession im Gleichlauf durch Multiplikation mit — 3 hervor. Mit (Abb. 2)

$$G_j^{k*} = \frac{1}{4}\varrho_0^4 \int_0^{1/2} v_j''(\xi)\, d\xi = \frac{1}{4}\varrho_0^4 \left[v_j'\left(\frac{1}{2}\right) - v_j'(0) \right],$$

$$G_j^{k*}\, s_j^{k*} = \frac{1}{4}\varrho_0^4 \int_0^{1/2} \xi\, v_j''(\xi)\, d\xi = \frac{1}{4}\varrho_0^4 \left[\frac{1}{2} v_j'\left(\frac{1}{2}\right) - v_j\left(\frac{1}{2}\right) \right],$$

wo bei Ausführung der Integrationen die Randbedingungen (10) berücksichtigt wurden, ist für synchrone Präzession im Gleichlauf

$$\mathfrak{A}_j^{k*} = P_{\alpha j}^* + \frac{1}{2} P_{\beta j}^* + G_j^{k*} - s_j^{k*} G_j^{k*} = \frac{1}{4}\varrho_0^4 v_j\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\mathfrak{B}_j^{k*} = s_j^{k*} G_j^{k*} + \frac{1}{2} P_{\beta j}^* = -\frac{1}{4}\varrho_0^4 v_j\left(\frac{1}{2}\right) = -\mathfrak{A}_j^{k*},$$

und weiter nach geringen Umformungen

$$\left.\begin{aligned} &1.\ \text{Feld}\ \left(0 \le \xi \le \frac{1}{2}\right): \quad M_j^{k*}(\xi) = \frac{1}{4}\varrho_0^4 \left[\xi\, v_j\left(\frac{1}{2}\right) - v_j(\xi) \right], \\ &2.\ \text{Feld}\ \left(\frac{1}{2} \le \xi \le 1\right): \quad M_j^{k*}(\xi) = -\frac{1}{4}\varrho_0^4 v_j\left(\frac{1}{2}\right)(1-\xi). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Mit den Gleichungen (15) und (16) lassen sich nun abschließend die Biegemomente für unberücksichtigte und berücksichtigte Kreiselwirkung angeben:

$$M_j \equiv M_j^0,$$
$$M_j^* = M_j^0 + M_j^{k*},$$
$$M_j^{**} = M_j^0 + M_j^{k**} = M_j^0 - 3 \cdot M_j^{k*}.$$

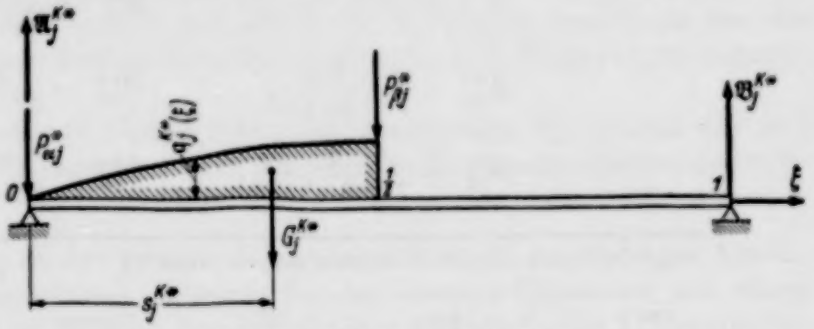

Abb. 2. Kreiselmomentbelastung.

Nachstehend sind die mit den Funktionen des zweigliedrigen Ansatzes berechneten Größen

$$F_{ik},\ A_{ik},\ \ldots,\ B_{ik}^{**}$$

und die damit im Fall „*Ritz*“ bzw. „Fall *Grammel*“ gewonnenen Näherungslösungen sowie die entsprechenden strengen Lösungen der Gleichungen (5) und (9) zusammengestellt. Die angenäherten und strengen Lösungen für den ersten Eigenwert wurden auf drei Dezimalstellen genau berechnet, diejenigen für den zweiten Eigenwert auf ganze Zahlen abgerundet. Für alle Näherungslösungen sind die prozentualen Abweichungen (in den Tabellen mit P bezeichnet) von den entsprechenden strengen Lösungen angegeben.

A. Unberücksichtigte Kreiselwirkung (ϱ_0 beliebig).

$$F_{11} = 4{,}8, \qquad A_{11} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 31}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}, \qquad B_{11} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 23\,391\,331}{2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13},$$

$$F_{12} = 36, \qquad A_{12} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 12\,879}{2^{11} \cdot 5 \cdot 7}, \qquad B_{12} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 1\,897\,309}{2^{17} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13},$$

$$F_{22} = \frac{1920}{7}, \qquad A_{22} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 620\,941}{2^{11} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}, \qquad B_{22} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 62\,327\,539}{2^{16} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}.$$

Näherungslösungen					Strenge Lösungen
$\bar{u}_i(\cdot\,\cdot)\,\varrho_0^2$	*Ritz*	P [%]	*Grammel*	P [%]	$u_i\,\varrho_0^2$
$\bar{u}_1(1)\,\varrho_0^2$	195,097	+ 4,78	186,300	+ 0,052	$u_1\,\varrho_0^2 = 186{,}203$
$\bar{u}_1(g)\,\varrho_0^2$	200,363	+ 7,60	186,372	+ 0,091	
$\bar{u}_1(2)\,\varrho_0^2$	208,975	+ 12,2	186,499	+ 0,16	
$\bar{u}_1(1{,}2)\,\varrho_0^2$	186,822	+ 0,33	186,206	+ 0,002	
$\bar{u}_2(1{,}2)\,\varrho_0^2$	11284	+ 75,6	6519	+ 1,45	$u_2\,\varrho_0^2 = 6\,426$

B. Berücksichtigte Kreiselwirkung (F_{ik} wie unter A).

Allgemein gilt für beliebiges ϱ_0

$$K_{11} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 17}{2 \cdot 5 \cdot 7}, \qquad K_{12} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 6353}{2^9 \cdot 7}, \qquad K_{22} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 46527}{2^9 \cdot 7}.$$

I. $\varrho_0 = \frac{1}{3}$. a) Synchrone Präzession im Gleichlauf.

$$A_{11}^{*} = \frac{\varrho_0^2}{2^3 \cdot 7}, \qquad B_{11}^{*} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 9501329}{2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13},$$

$$A_{12}^{*} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 42073}{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}, \qquad B_{12}^{*} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 64854221}{2^{19} \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13},$$

$$A_{22}^{*} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 75057}{2^{10} \cdot 7 \cdot 11}, \qquad B_{22}^{*} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 518797999}{2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}.$$

Näherungslösungen					Strenge Lösungen
$\bar{u}_i^{*}(\cdot\,\cdot)\,\varrho_0^2$	*Ritz*	P [%]	*Grammel*	P [%]	$u_i^{*}\,\varrho_0^2$
$\bar{u}_1^{*}(1)\,\varrho_0^2$	268,8	+ 4,49	256,804	— 0,18	$u_1^{*}\,\varrho_0^2 = 257{,}257$
$\bar{u}_1^{*}(g)\,\varrho_0^2$	276,000	+ 7,29	256,487	— 0,30	
$\bar{u}_1^{*}(2)\,\varrho_0^2$	288,139	+ 12	255,936	— 0,51	
$\bar{u}_1^{*}(1,2)\,\varrho_0^2$	258,248	+ 0,39	257,232	— 0,01	
$\bar{u}_2^{*}(1,2)\,\varrho_0^2$	(— 5447)	—	(— 3839)	—	$u_2^{*}\,\varrho_0^2$ = negativ

b) Synchrone Präzession im Gegenlauf.

$$A_{11}^{**} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 113}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}, \qquad B_{11}^{**} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 233239987}{2^{18} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13},$$

$$A_{12}^{**} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 35201}{2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \qquad B_{12}^{**} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 226515269}{2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13},$$

$$A_{22}^{**} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 566369}{2^{10} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}, \qquad B_{22}^{**} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 24066439}{2^{14} \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}.$$

Näherungslösungen					Strenge Lösungen
$\bar{u}_i^{**}(\cdot\,\cdot)\,\varrho_0^2$	*Ritz*	P [%]	*Grammel*	P [%]	$u_i^{**}\,\varrho_0^2$
$\bar{u}_1^{**}(1)\,\varrho_0^2$	107,044	+ 5,20	102,158	+ 0,40	$u_1^{**}\,\varrho_0^2 = 101{,}752$
$\bar{u}_1^{**}(g)\,\varrho_0^2$	109,961	+ 8,07	102,401	+ 0,64	
$\bar{u}_1^{**}(2)\,\varrho_0^2$	114,555	+ 12,6	102,795	+ 1,03	
$\bar{u}_1^{**}(1,2)\,\varrho_0^2$	102,041	+ 0,28	101,765	+ 0,01	
$\bar{u}_2^{**}(1,2)\,\varrho_0^2$	1112	+ 53,2	743	+ 2,34	$u_2^{**}\,\varrho_0^2 = 726$

II. $\varrho_0 = \frac{1}{10}$. a) Synchrone Präzession im Gleichlauf.

$$A_{11}^{*} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 6047}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7}, \qquad B_{11}^{*} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 794656459}{2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 11 \cdot 13},$$

$$A_{12}^{*} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 251227}{2^{13} \cdot 5^2 \cdot 7}, \qquad B_{12}^{*} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 54149621417}{2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13},$$

$$A_{22}^{*} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 60558709}{2^{13} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}, \qquad B_{22}^{*} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 830225735063}{2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}.$$

Näherungslösungen					Strenge Lösungen
$\bar{u}_{ik}^{*}(\cdot\,\cdot)\,\varrho_0^2$	*Ritz*	P [%]	*Grammel*	P [%]	$u_i^{*}\,\varrho_0^2$
$\bar{u}_1^{*}(1)\,\varrho_0^2$	200,033	+ 4,75	191,020	+ 0,035	$u_1^{*}\,\varrho_0^2 = 190{,}954$
$\bar{u}_1^{*}(g)\,\varrho_0^2$	205,430	+ 7,58	191,073	+ 0,062	
$\bar{u}_1^{*}(2)\,\varrho_0^2$	214,274	+ 12,2	191,168	+ 0,11	
$\bar{u}_1^{*}(1,2)\,\varrho_0^2$	191,593	+ 0,33	190,954	± 0	
$\bar{u}_2^{*}(1,2)\,\varrho_0^2$	15578	+ 86,2	8314	— 0,65	$u_2^{*}\,\varrho_0^2 = 8368$

b) Synchrone Präzession im Gegenlauf.

$$A_{11}^{**} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 6659}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7}, \qquad B_{11}^{**} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 6\,746\,335\,537}{2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13},$$

$$A_{12}^{**} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 276\,639}{2^{13} \cdot 5^2 \cdot 7}, \qquad B_{12}^{**} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 21\,880\,873\,151}{2^{21} \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13},$$

$$A_{22}^{**} = \frac{\varrho_0^2 \cdot 66\,700\,273}{2^{13} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}, \qquad B_{22}^{**} = \frac{\varrho_0^4 \cdot 1\,005\,991\,822\,607}{2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}.$$

Näherungslösungen					Strenge Lösungen
$\bar{u}_i^{**}(\cdot\,\cdot)\varrho_0^2$	*Ritz*	P [%]	*Grammel*	P [%]	$u_i^{**}\varrho_0^2$
$\bar{u}_1^{**}(1) \cdot \varrho_0^2$	181,649	+ 4,83	173,444	+ 0,096	$u_1^{**}\varrho_0^2 = 173,277$
$\bar{u}_1^{**}(g) \cdot \varrho_0^2$	186,559	+ 7,67	173,563	+ 0,17	
$\bar{u}_1^{**}(2) \cdot \varrho_0^2$	194,544	+ 12,3	173,767	+ 0,28	
$\bar{u}_1^{**}(1,2) \cdot \varrho_0^2$	173,832	+ 0,32	173,278	+ 0,001	
$\bar{u}_2^{**}(1,2) \cdot \varrho_0^2$	6179	+ 63,7	3874	+ 2,65	$u_2^{**}\varrho_0^2 = 3\,774$

Die Diskussion der Ergebnisse ergibt folgendes: Im „Fall *Ritz*" sind die errechneten Näherungslösungen sowohl für unberücksichtigte als auch für berücksichtigte Kreiselwirkung stets obere Schranken; im „Fall *Grammel*" gilt das gleiche für unberücksichtigte Kreiselwirkung und synchrone Präzession im Gegenlauf. Bei synchroner Präzession im Gleichlauf dagegen liegen die Wurzeln der Näherungsgleichungen z. T. oberhalb, z. T. unterhalb der entsprechenden strengen Lösungen. Alle nach „Fall *Grammel*" erhaltenen Näherungen sind viel genauer als die entsprechenden *Ritz*schen Lösungen, was ganz besonders bei den Annäherungen für den zweiten Eigenwert (erste Oberschwingung) auffällt. Diese größere Genauigkeit wurde mit einem gegenüber dem *Ritz*schen Verfahren größeren Aufwand an Rechenarbeit erzielt, der jedoch, da im allgemeinen nicht nur die Grundschwingung (erster Eigenwert) allein interessiert, durch die sehr gute Konvergenz gerechtfertigt ist.

Abschließend ist zu sagen, daß mit den in diesem Abschnitt gewonnenen Resultaten alle in I gemachten Aussagen bezüglich Lage und Genauigkeit der Wurzeln der Näherungsgleichungen verifiziert wurden.

5. Die Berechnung einer Annäherung an den zweiten Eigenwert mit einem eingliedrigen Ansatz. Im allgemeinen ist die Berechnung einer Näherungslösung für den zweiten Eigenwert mit einem zweigliedrigen Ansatz durchzuführen. Lediglich im Spezialfall einer bezüglich $\xi = 1/2$ symmetrischen Massenverteilung läßt sich eine Annäherung an den zweiten Eigenwert mit einem eingliedrigen Ansatz[1] berechnen, indem man eine solche zulässige Funktion v verwendet, die bezüglich $\xi = 1/2$ zentrumsymmetrisch ist und neben den Randbedingungen (10) den weiteren Bedingungen

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = v''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \tag{18}$$

genügt und sonst überall in $0 < \xi < 1$ von Null verschieden ist. Wegen der Symmetrie der Massenverteilung besitzt nämlich die zweite Eigenfunktion in $\xi = 1/2$ einen Knoten mit Wendetangente. Eine den vorstehend genannten Bedingungen genügende Funktion v ist auf Grund der Ausführungen des Abschnittes **3** als Annäherung an die zweite Eigenfunktion anzusprechen. Das damit gewonnene Resultat ist erfahrungsgemäß recht genau, was darauf zurückzuführen ist, daß v in der Wellenmitte $\xi = 1/2$ die für die zweite Eigenfunktion (bei symmetrischer Belastung) streng gültigen Bedingungen (18) erfüllt.

Es liegt daher nahe, im Falle einer unsymmetrischen Massenverteilung anzunehmen, daß man mit einer (nicht notwendig zulässigen) Funktion, deren Nullstelle in $0 < \xi < 1$ ungefähr mit derjenigen der (unbekannten) zweiten Eigenfunktion übereinstimmt, zu einer Näherungslösung für den zweiten Eigenwert gelangt. Natürlich kann man in den wenigsten Fällen eine Aussage über die Lage dieses Knotens machen. Dennoch läßt sich auch bei unsymmetrischer Belastung eine Annäherung an die zweite Eigenfunktion angeben, mit der, wie die Durchrechnung verschiedener Beispiele gezeigt hat, eine recht brauchbare Näherungslösung für den zweiten Eigenwert gewonnen werden kann. Der dabei einzuschlagende Weg wird hier zunächst für unberücksichtigte Kreiselwirkung kurz skizziert und anschließend auf das in dieser Arbeit behandelte Beispiel angewandt.

[1] s. Fußnote 3, S. 319.

Ist $f(\xi)$ eine Funktion, die die geometrischen (und eventuell auch die dynamischen) Randbedingungen des vorliegenden Eigenwertproblems erfüllt, so läßt sich die zur „Fliehkraftbelastung" $q(\xi) = \varrho^2(\xi) f(\xi)$ gehörige Wellenauslenkung $v(\xi)$ aus der Gleichung

$$v(\xi) = \int_0^1 K(\xi, \tau)\, \varrho^2(\tau) f(\tau)\, d\tau \tag{19}$$

bzw. durch Auflösen des Randwertproblems

$$\left.\begin{aligned} v^{(4)}(\xi) &= \varrho^2(\xi) f(\xi)\,, \\ v(0) = v(1) &= v''(0) = v''(1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ermitteln. Bei Mehrfelderproblemen treten zu den in (20) genannten Randbedingungen die Übergangsbedingungen an den Feldgrenzen, die die Stetigkeit der Funktion v und ihrer Ableitungen bis zur dritten Ordnung verlangen.

Faßt man diese Gleichungen als Iterationsvorschrift auf [(19) ist zu (20) äquivalent] und setzt

$$f(\xi, \delta) = g(\xi)\,(\xi - \delta)\,, \qquad g(0) = g(1) = 0\,, \qquad g(\xi) \neq 0 \quad \text{für} \quad 0 < \xi < 1\,,$$

so ist die nach (19) oder (20) errechnete Funktion v von ξ und δ abhängig. Der Parameter δ wird nun nachträglich so bestimmt, daß die Ausgangsfunktion $f(\xi, \delta)$ sowie die durch Iteration entstandene Funktion $v(\xi, \delta)$ die gleiche Nullstelle in $0 < \xi, \delta < 1$ besitzen. Mit den auf diese Weise eindeutig bestimmten Funktionen berechnet man

$$\bar{A} = \int_0^1 \varrho^2 f^2\, d\xi\,, \qquad \bar{B} = \int_0^1 \varrho^2 f v\, d\xi\,.$$

Es werden hier überstrichene Größen eingeführt, um eine Verwechslung mit den früher für zulässige Funktionen definierten Größen A_{ik} und B_{ik} auszuschließen. Die zu (11) analoge Lösung der linearen Gleichung

$$\bar{u}_2 = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \tag{21}$$

ist sodann die gesuchte Näherungslösung für den zweiten Eigenwert.

Für das in den vorhergehenden Abschnitten behandelte Beispiel mit

$$\varrho(\xi) = \begin{cases} \varrho_0 \text{ im } \varkappa\text{-Feld}, & 0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}\,, \\ 0 \text{ im } \lambda\text{-Feld}, & \frac{1}{2} \leqq \xi \leqq 1\,, \end{cases}$$

lautet die mit der Funktion

$$\left.\begin{aligned} f(\xi, \delta) &= (\xi^2 - \xi)\,(\xi - \delta) = \xi^3 - \xi^2\,(1 + \delta) + \xi\,\delta\,, \\ f(0) &= f(\delta) = f(1) = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

[f erfüllt nur die geometrischen Randbedingungen] gebildete zugehörige „Fliehkraftbelastung"

$$q(\xi, \delta) = \begin{cases} \varrho_0^2 f(\xi, \delta) & \text{für } 0 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}\,, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{2} \leqq \xi \leqq 1\,. \end{cases}$$

Die zu $q(\xi, \delta)$ gehörige Wellenauslenkung erhält man entweder gemäß Gleichung (20) durch Auflösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} v_\varkappa^{(4)}(\xi, \delta) &= \varrho_0^2 f(\xi, \delta)\,, \\ v_\lambda^{(4)}(\xi, \delta) &= 0\,, \\ v_\varkappa(\xi = 0, \delta) = v_\varkappa''(\xi = 0, \delta) &= v_\lambda(\xi = 1, \delta) = v_\lambda''(\xi = 1, \delta) = 0\,, \end{aligned}$$

mit den Übergangsbedingungen

$$v_\varkappa^{(j)}\left(\xi = \frac{1}{2}, \delta\right) = v_\lambda^{(j)}\left(\xi = \frac{1}{2}, \delta\right) \quad (j = 0, 1, 2, 3)$$

oder — was zwar auf dasselbe hinausläuft, hier aber kürzer ist, da bereits fertige Formeln vorliegen — durch Auflösung der Randwertaufgabe

$$v_\varkappa''(\xi,\delta) = -M_\varkappa(\xi,\delta)\,,$$
$$v_\lambda''(\xi,\delta) = -M_\lambda(\xi,\delta)\,,$$
$$v_\varkappa(\xi=0,\delta) = v_\lambda(\xi=1,\delta) = 0\,,$$
$$v_\varkappa^{(j)}\left(\xi=\frac{1}{2},\delta\right) = v_\lambda^{(j)}\left(\xi=\frac{1}{2},\delta\right) \quad (j=0,1),$$

wobei sich $M_\varkappa(\xi,\delta)$ und $M_\lambda(\xi,\delta)$ nach den Gleichungen (15) berechnen lassen; man hat dort nur $v_j(\xi)$ durch $f(\xi,\delta)$ zu ersetzen. Da die Ausführung dieser Rechnung keinerlei Schwierigkeiten bereitet, wird sie übergangen und sofort das Endergebnis angegeben:

$$v_\varkappa(\xi,\delta) = \frac{\varrho_0^2}{2^8\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}\,[96\,\xi^7 - 224\,\xi^6(1+\delta) + 672\,\xi^5\delta - 14\,\xi^3(-16+55\,\delta) + \xi(-125+371\,\delta)]\,,$$

$$v_\lambda(\xi,\delta) = \frac{\varrho_0^2}{2^8\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}\,[14\,\xi^3(-9+25\,\delta) + 42\,\xi^2(9-25\,\delta) + \xi(-272+749\,\delta) + (20-49\,\delta)]\,.$$

Schreibt man abkürzend

$$v_\varkappa(\xi,\delta) = \frac{\varrho_0^2}{2^8\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}\,P(\xi,\delta)\,,$$

$$P(\xi,\delta) = 96\,\xi^7 - 224\,\xi^6(1+\delta) + 672\,\xi^5\delta - 14\,\xi^3(-16+55\,\delta) + \xi(-125+371\,\delta)\,,$$

so haben die Funktionen $f(\xi,\delta)$ und $v_\varkappa(\xi,\delta)$ die gleiche Nullstelle für ein der Gleichung

$$P(\delta,\delta) = \delta(-128\,\delta^6 + 448\,\delta^5 - 770\,\delta^3 + 224\,\delta^2 + 371\,\delta - 125) = \delta\,P'(\delta) = 0$$

genügendes δ. Daß die Komponente $v_\lambda(\xi,\delta)$ im Bereich $\frac{1}{2} \leqq \xi,\delta < 1$ keine Nullstelle besitzt, ist durch Rechnung leicht festzustellen; auf Grund der vorliegenden Massenverteilung ist von vornherein zu erwarten, daß der Knoten im $\varkappa$-Feld liegt. Aus den Funktionswerten

$$P'(\delta = 0{,}34495) = -0{,}00251\,,$$
$$P'(\delta = 0{,}34496) = +0{,}00027$$

ist zu ersehen, daß das gesuchte δ zwischen 0,34495 und 0,34496 liegt.

Die für die Ermittlung von $\bar{u}_2$ nach Gleichung (21) benötigten Größen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ errechnen sich zu

$$\bar{A} = \varrho_0^2\int_0^{1/2} f^2(\xi,\delta)\,d\xi = \frac{\varrho_0^2}{2^7\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\,(29 - 154\,\delta + 224\,\delta^2)\,,$$

$$\bar{B} = \varrho_0^2\int_0^{1/2} f(\xi,\delta)\cdot v_\varkappa(\xi,\delta)\,d\xi = \int_0^{1/2} M_\varkappa^2(\xi,\delta)\,d\xi + \int_{1/2}^{1} M_\lambda^2(\xi,\delta)\,d\xi$$
$$= \frac{\varrho_0^4}{2^{14}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}\,(27250 - 157630\,\delta + 228580\,\delta^2)\,.$$

Für den der Nullstelle am nächsten liegenden Wert $\delta = 0{,}34496$ führt die lineare Gleichung

$$\bar{A} - \bar{u}\,\bar{B} = 0$$

auf die Lösung

$$\bar{u}_2(f,v)\,\varrho_0^2 = 6\,469\,.$$

Diese Lösung ist eine sehr gute Annäherung an den zweiten Eigenwert; sie liegt um 0,67% über der strengen Lösung $u_2\,\varrho_0^2 = 6426$ und ist noch genauer als die mit dem zweigliedrigen Ansatz gewonnene *Grammel*sche Lösung $\bar{u}_2(1,2)\,\varrho_0^2 = 6519$ (+ 1,45%).

Für berücksichtigte Kreiselwirkung im Falle synchroner Präzession im Gleichlauf mit $\varrho_0 = 1/10$ ist gemäß Iterationsvorschrift die zur Belastung

$$q^*(\xi,\delta) = \varrho_0^2 f(\xi,\delta) + \frac{1}{4}\varrho_0^4 f''(\xi,\delta) \text{ für } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2},$$

$$P_\alpha^*(\delta) = \frac{1}{4}\varrho_0^4 f'(\xi = 0,\delta) \text{ für } \xi = \alpha = 0,$$

$$P_\beta^*(\delta) = -\frac{1}{4}\varrho_0^4 f'\left(\xi = \frac{1}{2},\delta\right) \text{ für } \xi = \beta = \frac{1}{2}$$

gehörige Wellenauslenkung

$$v^*(\xi,\delta) = \begin{cases} v_\varkappa^*(\xi,\delta) & \text{für } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \\ v_\lambda^*(\xi,\delta) & \text{für } \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

aufzusuchen. Zweckmäßigerweise verwendet man hierzu die Biegemomente $M_\varkappa^*(\xi,\delta)$ und $M_\lambda^*(\xi,\delta)$, die sich aus (15) und (16) nach (17) zusammensetzen. Durch Auflösung der Randwertaufgabe

$$v_\varkappa^{*\prime\prime}(\xi,\delta) = -M_\varkappa^*(\xi,\delta),$$
$$v_\lambda^{*\prime\prime}(\xi,\delta) = -M_\lambda^*(\xi,\delta),$$
$$v_\varkappa^*(\xi = 0,\delta) = v_\lambda^*(\xi = 1,\delta) = 0,$$
$$v_\varkappa^*\left(\xi = \frac{1}{2},\delta\right) = v_\lambda^*\left(\xi = \frac{1}{2},\delta\right),$$
$$v_\varkappa^{*\prime}\left(\xi = \frac{1}{2},\delta\right) = v_\lambda^{*\prime}\left(\xi = \frac{1}{2},\delta\right)$$

lassen sich die gesuchten Funktionen $v_\varkappa^*(\xi,\delta)$ und $v_\lambda^*(\xi,\delta)$ angeben:

$$v_\varkappa^*(\xi,\delta) = \frac{\varrho_0^2}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7}\,[9600\,\xi^7 - 22400\,\xi^6(1+\delta) + 336\,\xi^5(3+200\,\delta) - 1680\,\xi^4(1+\delta) -$$
$$- 140\,\xi^3(-163+532\,\delta) + \xi(-12269+36155\,\delta)],$$

$$v_\lambda^*(\xi,\delta) = \frac{\varrho_0^2}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7}\,[140\,\xi^3(-87+244\,\delta) - 420\,\xi^2(-87+244\,\delta) +$$
$$+ \xi(-26234+73115\,\delta) + (1874-4795\,\delta)].$$

Mit

$$v_\varkappa^*(\xi,\delta) = \frac{\varrho_0^2}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7}\,P(\xi,\delta),$$

$$P(\xi,\delta) = 9600\,\xi^7 - 22400\,\xi^6(1+\delta) + 336\,\xi^5(3+200\,\delta) - 1680\,\xi^4(1+\delta) -$$
$$- 140\,\xi^3(-163+532\,\delta) + \xi(-12269+36155\,\delta),$$

haben $f(\xi,\delta)$ und $v_\varkappa^*(\xi,\delta)$ die gleiche Nullstelle für einen der Gleichung

$$P(\delta,\delta) = -\delta\,[12800\,\delta^6 - 44800\,\delta^5 + 672\,\delta^4 + 76160\,\delta^3 - 22800\,\delta^2 -$$
$$- 36155\,\delta + 12269] = -\delta\,P'(\delta) = 0$$

genügenden Wert δ. Auch hier ist, wie leicht nachzuprüfen ist, $v_\lambda^*(\xi,\delta) \neq 0$ in $\frac{1}{2} \leqq \xi, \delta < 1$. Es ist

$$P'(\delta = 0{,}34577) = +0{,}24187,$$
$$P'(\delta = 0{,}34578) = -0{,}03123,$$

d. h. die gesuchte Nullstelle liegt zwischen $\delta = 0{,}34577$ und $\delta = 0{,}34578$. Die Berechnung der Größen $\bar{A}^*$ und $\bar{B}^*$ nach den bekannten Gleichungen

$$\bar{A}^* = \varrho_0^2 \int_0^{1/2} f^2(\xi,\delta)\,d\xi - \frac{1}{4}\varrho_0^4 \int_0^{1/2} f'^2(\xi,\delta)\,d\xi,$$

$$B^* = \int_0^{1/2} M_\varkappa^{*2}(\xi,\delta)\,d\xi + \int_{1/2}^{1} M_\lambda^{*2}(\xi,\delta)\,d\xi$$

ergibt

$$\bar{A}^* = \frac{\varrho_0^2}{2^9 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7}\,(2781 - 15050\,\delta + 21840\,\delta^2)\,,$$

$$\bar{B}^* = \frac{\varrho_0^4}{2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 11}\,(12997340 - 75106559\,\delta + 108683036\,\delta^2)\,.$$

Aus der linearen Gleichung

$$\bar{A}^* - \bar{u}\,\bar{B}^* = 0$$

erhält man mit $\delta = 0{,}345\,78$ die Näherungslösung

$$\bar{u}_2^*(f, v^*)\,\varrho_0^2 = 8\,303\,.$$

Auch hierbei handelt es sich um eine sehr gute Annäherung an den zweiten Eigenwert, die von der strengen Lösung $u_2^*\,\varrho_0^2 = 8\,368$ um $-0{,}78\%$ abweicht und etwas weniger genau ist als die mit dem zweigliedrigen Ansatz berechnete *Grammel*sche Lösung $\bar{u}_2^*(1, 2)\,\varrho_0^2 = 8314\,(-0{,}65\%)$.

6. Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, mit der Durchrechnung eines Zahlenbeispiels die Brauchbarkeit der in I hergeleiteten Gleichungen für die angenäherte Berechnung kritischer Drehzahlen von Wellen mit kontinuierlicher Scheibenverteilung unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung zu zeigen und an Hand der damit gewonnenen Resultate die dort bezüglich Genauigkeit und Konvergenz gemachten Aussagen zu bestätigen. Ferner wurde der Versuch gemacht, die Berechnung einer brauchbaren Näherungslösung für den zweiten Eigenwert (erste Oberschwingung) mit einem eingliedrigen Ansatz durchzuführen. Die hierzu angestellten Überlegungen führen auf eine Iterationsvorschrift, mit der sich die Lage des Knotens einer Annäherung an die zweite Eigenfunktion so bestimmen läßt, daß die mit der durch Iteration erhaltenen Funktion durchgeführte Rechnung ein durchaus befriedigendes Ergebnis liefert.

(Eingegangen am 14. November 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Ludwig Fehrle*, Mülheim (Ruhr), Dickswall 2b

Nichtstationäre Wärmespannungen in ausgemauerten Behältern und die Berechnung der Ausmauerung an Hand eines Temperatur-Schaubildes *

Von H. D. Baehr

1. Das Ausmauerungsproblem. Stählerne Behälter und Apparate, in denen Säuren oder Laugen verarbeitet werden, erhalten oft eine Auskleidung durch keramische Steine, um den Mantel vor Korrosionen zu schützen. Zur Verbindung der Mauersteine untereinander und mit dem Eisenmantel werden besondere Kitte verwendet. Die Ausmauerung ist zeitlich wechselnden Temperaturen und Druckbeanspruchungen unterworfen; bei nicht sachgemäßer Ausmauerung sind daher oft Schäden aufgetreten, sei es daß sich Mauerwerk und Eisenmantel voneinander lösten, sei es daß das Mauerwerk durch das Auftreten zu hoher Zugbeanspruchungen undicht wurde, oder daß die Mantelbeanspruchung des Behälters unzulässig groß wurde, was zu Explosionen z. B. bei Zellstoffkochern führte.

Beim Anheizen eines ausgemauerten Behälters entsteht ein radiales Temperaturgefälle von innen nach außen. Das Mauerwerk und der Eisenmantel dehnen sich infolge der Temperaturerhöhung aus. Obwohl im allgemeinen die Wärmedehnzahl β_m des Mauerwerks kleiner als die Wärmedehnzahl β_e des Eisens ist, dehnt sich das Mauerwerk zunächst mehr als der Eisenmantel. Die Temperaturerhöhung des Mauerwerks ist nämlich größer als die des Eisenmantels. Es entsteht so zwischen Eisenmantel und Mauerwerk ein immer stärker werdender Anpreßdruck, der während des Anheizens einen Höchstwert annimmt, dann aber wieder absinkt, wenn nämlich der Eisenmantel weiter erwärmt ist und sich ebenfalls genügend dehnt. Während des Anheizens besteht somit die Gefahr, daß im Behältermantel unzulässig hohe Zugbeanspruchungen auftreten.

Nähert sich der Anheizvorgang dem stationären Endzustand, so läßt der Anpreßdruck nach, weil sich der Eisenmantel rascher erwärmt als das Mauerwerk, sich somit auch stärker dehnt. Hier beginnt nun die Gefahr, daß sich das Mauerwerk vom Eisenmantel ablöst, weil wegen der größeren Wärmedehnzahl $\beta_e > \beta_m$ die Dehnung des Eisenmantels größer als die der Ausmauerung werden kann, obwohl die Eisenmanteltemperatur tiefer liegt als die der Ausmauerung. Diese Gefahr des Ablösens ist noch größer beim Abkühlen des Behälters. Hier sinkt zunächst die Mauertemperatur, während die Eisenmanteltemperatur beim Beginn der Abkühlung fast konstant bleibt. Somit zieht sich das Mauerwerk zusammen und kann sich vom Eisenmantel, der praktisch unverändert stehen bleibt, ablösen.

Eine weitere Schwierigkeit entsteht dadurch, daß das Mauerwerk keine Zugspannungen aufnehmen kann. Durch den inneren Überdruck und durch ein radiales Temperaturgefälle von innen nach außen entstehen jedoch im Mauerwerk Zugspannungen, die um so größer sind, je größer das Temperaturgefälle ist.

Bei der Ausmauerung eines Behälters müssen also drei Forderungen unbedingt berücksichtigt werden:

1. Die Ausmauerung darf sich nicht vom Eisenmantel ablösen.
2. Im Mauerwerk dürfen keine Zugspannungen auftreten.
3. Die Mantelbeanspruchung darf nicht unzulässig hoch werden.

Um die beiden ersten Forderungen zu erfüllen, erteilt man dem Mauerwerk eine Druckvorspannung, indem man zur Ausmauerung quellenden Kitt verwendet. Hierdurch erreicht man bereits im kalten Zustand eine Pressung zwischen Mauerwerk und Eisenmantel, wodurch im Mauerwerk eine Druckspannung entsteht, welche die Zugspannungen, die dann infolge der Erwärmung und des Innendrucks auftreten, unterdrückt. Allerdings wird hierdurch die Mantelspannung vergrößert, so daß die Gefahr besteht, Bedingung 3 zu verletzen.

Auch durch eine genügend große Dicke der Ausmauerung läßt sich die Ablösung des Mauerwerks verhindern. Durch die dickere Ausmauerung wird der Temperaturunterschied zwischen mittlerer Mauerwerkstemperatur und Eisenmanteltemperatur vergrößert. Die kleinere Wärmedehnzahl des Mauerwerks wird durch die höhere Mauerwerkstemperatur kompensiert, die Dehnung des Eisenmantels ausgeglichen und somit die Ablösung verhindert.

Andererseits hat die Zunahme der Ausmauerungsstärke vergrößerte Beanspruchung des Mantels zur Folge, weswegen von diesem Gesichtspunkt aus kleinere Mauerstärken günstiger wären. Die

* Ein Teil der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Karlsruhe genehmigten Habilitationsschrift des Verfassers.

Mantelbeanspruchung könnte natürlich durch eine genügend große Eisenmanteldicke in erträglichen Grenzen gehalten werden. Aus wirtschaftlichen Gründen wird man jedoch kleine Eisenmantelstärken anstreben.

Die obengenannten Forderungen geben somit obere und untere Grenzen für die Wandstärken: die Aufgabe des Konstrukteurs besteht darin, die günstigsten Verhältnisse zu wählen. Diese Aufgabe wird hier durch folgende Umstände erschwert.

Der Temperaturverlauf beim Anheizen und Abkühlen kann sehr verschiedenartig sein. Man muß daher eine große Zahl von Variablen berücksichtigen. Der Temperaturverlauf hängt auch von der Ausmauerungsdicke ab: das thermische Problem und das Festigkeitsproblem beeinflussen sich also gegenseitig. Schließlich sind die Stoffwerte der Ausmauerung, die in die Rechnung eingehen, wie Elastizitätsmodul, Wärmedehnzahl, Wärmeleitzahl, Temperaturleitzahl und die Quellung der Kitte sehr schwankend und nicht eindeutig definiert, da das Mauerwerk einen aus hinter- und nebeneinander geschalteten Elementen bestehenden Verbundkörper darstellt. Hierauf wurde kürzlich besonders hingewiesen [1].

Andererseits erlauben diese Unsicherheiten auch Vereinfachungen in der theoretischen Untersuchung. Bei der Berechnung einer Ausmauerung besteht schließlich noch eine gewisse Freiheit in der endgültigen Wahl der Abmessungen.

Die Berechnung ausgemauerter Behälter hat sich bisher auf den stationären Betriebszustand beschränkt. Hier liegen Untersuchungen von *W. Matz* [2] für zylinderförmige und von *U. Troltenier* [3] für kugelförmige Behälter vor. Anheiz- und Abkühlvorgänge bei ausgemauerten Zellstoffkochern hat *E. Kirschbaum* [4] durch Temperaturmessungen in der Ausmauerung verfolgt, bei der Spannungsuntersuchung sich jedoch auf die Berechnung der Mantelbeanspruchung beschränkt. Ein auf Zellstoffkocher zugeschnittenes Verfahren zur Berechnung der Ausmauerung wurde kürzlich vom Verfasser entwickelt [5]; es stellt einen Sonderfall der hier behandelten allgemeinen Betrachtungen dar.

Im folgenden beschränken wir uns auf ausgemauerte zylinderförmige Behälter, die von innen beheizt werden, vgl. Abb. 1. Hierbei wird angenommen, daß sich auch das Mauerwerk wie ein *Hooke*scher Körper verhält. Die etwas verwickelten Beziehungen dieses gekoppelten nichtstationären Wärmedurchgangs- und Wärmespannungsproblems werden in einfacher Weise in einem Temperatur-Schaubild dargestellt. Mit dessen Hilfe kann auch erstmals die Neuberechnung einer Ausmauerung unter Berücksichtigung der Anheiz- und Abkühlvorgänge vorgenommen werden.

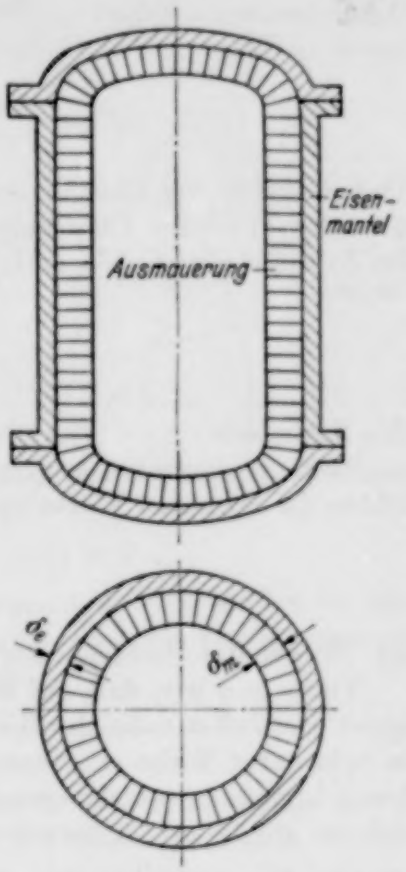

Abb. 1. Ausgemauerter Behälter (schematisch).

2. Dehnungen und Spannungen. a) Dehnungen und Spannungen in einem Hohlzylinder unter Druck und unter der Wirkung eines radialen Temperaturgefälles. Um zu einer Theorie des ausgemauerten Behälters zu gelangen, muß man das elastische Verhalten eines Hohlzylinders unter Druck und bei einer vorgeschriebenen Temperaturverteilung kennen. Der Spannungszustand in einem Zylinder unter Innen- und Außendruck ist seit langem bekannt; ebenso die Dehnungen und Spannungen infolge eines radialen Temperaturgefälles [6]. Kürzlich hat *R. Trostel* [7] die instationären Wärmespannungen in sehr allgemeiner Weise behandelt, was jedoch auf verwickelte und nur schwierig anzuwendende Beziehungen führte.

Um zu einer praktisch genügend genauen, aber einfachen Näherungslösung zu gelangen, wollen wir verschiedene Vereinfachungen vornehmen, die im Hinblick auf die Unsicherheiten in den Materialeigenschaften der Ausmauerung und in den Wärmeübertragungsverhältnissen durchaus gerechtfertigt erscheinen:

[1] 14. Dechema — Kolloquium. Chemie-Ing.-Techn. 27 (1955) S. 218.
[2] *W. Matz*, Berechnung der Ausmauerung stählerner Gefäße. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1953. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind leider durch einige Irrtümer entstellt.
[3] *U. Troltenier*, Chemie-Ing.-Techn. 26 (1954) S. 281.
[4] *E. Kirschbaum*, Dechema-Monograph. 23 (1954) S. 7.
[5] *H. D. Baehr*, Allg. Wärmetechnik 7 (1956) S. 49.
[6] *R. Lorenz*, Z. VDI 51 (1907) S. 743.
[7] *R. Trostel*, Ing.-Archiv 24 (1956) S. 1.

1. Die Temperaturen hängen (außer von der Zeit τ) nur von der radialen Koordinate r, jedoch nicht von φ und z ab.

2. Wir beschränken uns darauf, den mittleren Teil eines langen Zylinders zu betrachten, und berücksichtigen nicht die verwickelten Randspannungszustände an den Enden.

3. Die Dicke $\delta = r_a - r_i$ des Zylinders sei klein gegenüber dem mittleren Halbmesser r_m, so daß Größen der Ordnung δ/r_m gegenüber 1 zu vernachlässigen sind.

Unter den Voraussetzungen 1. und 2. gelten für die Wärmespannungen die Beziehungen[1]

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r^{(w)} &= \frac{E\beta}{1-\nu}\left\{\left[1-\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\frac{\vartheta_m(\tau)}{2} - \frac{1}{r^2}\int_{r_i}^{r}\vartheta(r,\tau)\,r\,dr\right\},\\
\sigma_\varphi^{(w)} &= \frac{E\beta}{1-\nu}\left\{\left[1+\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\frac{\vartheta_m(\tau)}{2} - \vartheta(r,\tau) + \frac{1}{r^2}\int_{r_i}^{r}\vartheta(r,\tau)\,r\,dr\right\},\\
\sigma_z^{(w)} &= \frac{E\beta}{1-\nu}\left[\vartheta_m(\tau) - \vartheta(r,\tau)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dabei sind E der Elastizitätsmodul, ν die Querdehnzahl und β die Wärmedehnzahl des Materials; $\vartheta = \vartheta(r,\tau)$ ist die Übertemperatur über die Temperatur $\vartheta = 0$, bei der keine Wärmespannungen im Zylinder vorhanden sind; ϑ_m ist die mittlere Temperatur

$$\vartheta_m(\tau) = \frac{2}{r_a^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r_a}\vartheta(r,\tau)\,r\,dr \tag{2}$$

des Zylinders.

Für $r = r_a$ und $r = r_i$ ist $\sigma_r^{(w)} = 0$, so daß die Mantelflächen spannungsfrei sind; dagegen bilden die achsialen Wärmespannungen nur ein Gleichgewichtssystem in dem Sinne, daß

$$\int_{r_i}^{r_a}\sigma_z^{(w)}\,r\,dr = 0$$

ist. Wegen des Randspannungszustandes vergleiche man die Ausführungen bei *Trostel*.

Verlangen wir, daß auf der inneren Mantelfläche der Druck p_i, auf der äußeren der Druck p_a lastet und daß in achsialer Richtung der Druck p_z wirkt, so ist dem Wärmespannungszustand nach (1) in bekannter Weise ein Spannungszustand infolge der Druckbelastung zu überlagern. Für die uns hier am meisten interessierenden Spannungen an den Radien r_i und r_a — dort treten die Spannungsspitzen auf — erhält man unter Anwendung der Voraussetzung 3.:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r(r_i) &= -p_i,\\
\sigma_\varphi(r_i) &= \frac{E\beta}{1-\nu}\left[\vartheta_m(\tau) - \vartheta(r_i,\tau)\right] - (p_a - p_i)\frac{r_m}{\delta},\\
\sigma_z(r_i) &= \frac{E\beta}{1-\nu}\left[\vartheta_m(\tau) - \vartheta(r_i,\tau)\right] - p_z
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r(r_a) &= -p_a,\\
\sigma_\varphi(r_a) &= \frac{E\beta}{1-\nu}\left[\vartheta_m(\tau) - \vartheta(r_a,\tau)\right] - (p_a - p_i)\frac{r_m}{\delta},\\
\sigma_z(r_a) &= \frac{E\beta}{1-\nu}\left[\vartheta_m(\tau) - \vartheta(r_a,\tau)\right] - p_z.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Verschiebungen $\varrho^{(w)}$ und $\zeta^{(w)}$, die ein Punkt, der im lastfreien und kalten Zustand die Koordinaten r und z hatte, infolge der Temperaturerhöhung allein erfährt, ergeben sich nach *Trostel* zu

$$\frac{\varrho^{(w)}}{r} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\beta\left\{\left[\frac{1-3\nu}{1+\nu} + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\frac{\vartheta_m(\tau)}{2} + \frac{1}{r^2}\int_{r_i}^{r}\vartheta(r,\tau)\,r\,dr\right\} \tag{5}$$

und

$$\frac{\zeta^{(w)}}{z} = \beta\,\vartheta_m(\tau), \tag{6}$$

[1] Vgl. *R. Trostel* a. a. O. S. 21. Die Gl. (1) sind gegenüber den Gl. (141) von *Trostel* etwas umgeformt.

wobei für $z = 0$ willkürlich $\zeta = 0$ gesetzt wurde. Überlagert man diesen Verschiebungen noch diejenigen, die infolge der Druckbeanspruchung entstehen, so ergibt sich für $r = r_i$ und $r = r_a$

$$\frac{\varrho(r_i)}{r_i} = \beta\,\vartheta_m - (p_a - p_i)\,\frac{r_m}{\delta\,E} + \frac{\nu\,p_z}{E} = \frac{\varrho(r_a)}{r_a} \tag{7}$$

und ferner

$$\frac{\zeta}{z} = \beta\,\vartheta_m + \nu\,(p_a - p_i)\,\frac{r_m}{\delta\,E} - \frac{p_z}{E}\,. \tag{8}$$

Um die Spannungen und Verschiebungen für $r = r_i$ und $r = r_a$ zu berechnen, ist also nur die Kenntnis von drei Temperaturen, $\vartheta(r_i, \tau)$, $\vartheta(r_a, \tau)$ und $\vartheta_m(\tau)$ erforderlich. Diese müssen in ihrer zeitlichen Abhängigkeit aus der Untersuchung der Wärmedurchgangsverhältnisse gewonnen werden.

b) Dehnungen und Spannungen im ausgemauerten Behälter. Ein stählerner Behälter mit dem Innenhalbmesser r_0 wird bei einer bestimmten Temperatur t_A, der Ausmauerungstemperatur, mit einer Mauerwerksschicht der Dicke δ_m ausgekleidet (Abb. 2). Dies geschieht unter Verwendung eines quellenden Kittes, so daß sich alle Längendimensionen des Mauerwerks infolge der Kittquellung um den Faktor $(1 + q)$ vergrößern würden, könnte sich das Mauerwerk ungehindert ausdehnen. Das Quellungsmaß q, kurz als Kittquellung bezeichnet, liegt dabei in der Größenordnung von etwa $q = 3 \cdot 10^{-4}$, läßt sich aber in weiten Grenzen variieren [1].

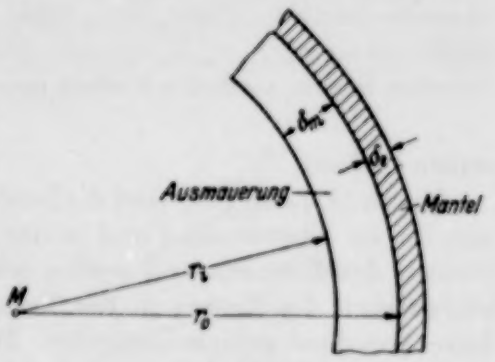

Abb. 2. Ausgemauerter Behälter; Bezeichnungen.

Da das Mauerwerk vom Eisenmantel behindert wird, entsteht zwischen Mauerwerk und Eisenmantel ein in radialer Richtung wirkender Anpreßdruck p. In achsialer Richtung entsteht im Mauerwerk ein Druck p_m, im Eisenmantel ein Zug $-p_e$ (p_e als Druck positiv gerechnet). Durch einen Schnitt normal zur Achse des Behälters erhält man die Gleichgewichtsbedingung

$$p_i\,(r_0 - \delta_m)^2 + p_m\,[r_0^2 - (r_0 - \delta_m)^2] + p_e\,[(r_0 + \delta_e)^2 - r_0^2] = 0\,.$$

Hierbei ist p_i der Innendruck im Behälter und δ_e die Dicke des Eisenmantels. Wir wollen im folgenden wieder sowohl δ_e als auch δ_m als klein gegenüber r_0 ansehen und r_0 als einen für Mauerwerk und Eisenmantel gemeinsamen mittleren Radius benutzen. Dann folgt

$$-p_e = \frac{r_0\,p_i}{2\,\delta_e} + p_m\,\frac{\delta_m}{\delta_e}\,. \tag{9}$$

Dies ist die einzige statische Gleichung, die sich für den Behälter anschreiben läßt. Somit sind p und p_m zwei statisch unbestimmte Größen, die aus dem elastischen Verhalten berechnet werden müssen. Der Mauerwerkszylinder erfährt dabei Dehnungen infolge der Kittquellung q, der Temperaturerhöhung über die Ausmauerungstemperatur t_A, des Innendrucks p_i, des Anpreßdrucks p, der für das Mauerwerk ein äußerer Druck ist, und durch den Druck p_m. Der Mantel dehnt sich infolge der Temperaturerhöhung, des Zuges ($-p_e$) und des Anpreßdrucks p, der für den Mantel ein innerer Druck ist.

Für die Verschiebung des äußeren Mauerwerkshalbmessers r_0 erhält man daher unter Benutzung von (7)

$$\frac{\varrho_m(r_0)}{r_0} = q + \beta_m\,(t_m - t_A) - (p - p_i)\,\frac{r_0}{E_m\,\delta_m} + \frac{\nu_m\,p_m}{E_m}\,, \tag{10a}$$

dagegen für die Verschiebung der Punkte des inneren Eisenmantelhalbmessers r_0

$$\frac{\varrho_e(r_0)}{r_0} = \beta_e\,(t_e - t_A) + \frac{p\,r_0}{E_e\,\delta_e} + \frac{\nu_e\,p_e}{E_e}\,. \tag{10b}$$

Dabei wurden die Stoffwerte des Mauerwerks mit dem Index m, die Stoffwerte des Eisenmantels mit dem Index e verschen. t_m bedeutet die mittlere Mauerwerkstemperatur nach (2), t_e die Temperatur des Eisenmantels. Für die Verschiebungen in achsialer Richtung erhält man

$$\frac{\zeta_m}{z} = q + \beta_m\,(t_m - t_A) + \nu_m\,(p - p_i)\,\frac{r_0}{E_m\,\delta_m} - \frac{p_m}{E_m} \tag{11a}$$

und

$$\frac{\zeta_e}{z} = \beta_e\,(t_e - t_A) - \frac{\nu_e\,p\,r_0}{E_e\,\delta_e} - \frac{p_e}{E_e}\,. \tag{11b}$$

[1] Siehe Fußnoten 1 und 2 von S. 331.

Die Bedingungen

$$\frac{\varrho_m(r_0)}{r_0} = \frac{\varrho_e(r_0)}{r_0} \qquad \text{und} \qquad \frac{\zeta_m}{z} = \frac{\zeta_e}{z} \tag{12}$$

liefern zwei lineare Gleichungen für p und p_m mit den Lösungen

$$p = \frac{E_e' \delta_e / r_0}{1 + (E_e' \delta_e / E_m' \delta_m)} \left[q + \beta_m (t_m - t_A) - \beta_e (t_e - t_A) + \frac{p_i r_0}{E_m' \delta_m} k_1 \right], \tag{13}$$

$$p_m = \frac{r_0}{\delta_m} \left[p - \frac{p_i}{2} \frac{k_2 + 2 k_1 (E_e' \delta_e / E_m' \delta_m)}{1 + (E_e' \delta_e / E_m' \delta_m)} \right]. \tag{14}$$

Hierbei ist

$$E_m' = \frac{E_m}{1 - \nu_m} \qquad \text{und} \qquad E_e' = \frac{E_e'}{1 - \nu_e} \tag{15}$$

gesetzt.

Die Größen k_1 und k_2 sind Ausdrücke, die sich im wesentlichen aus Kombinationen von ν_e und ν_m zusammensetzen. Für $\nu_e = \nu_m$ ist $k_1 = k_2 = 1$; selbst für $\nu_m = 0$ ist $k_1 > 0{,}9$, während $0{,}9 < k_2 \leqq 1$ bleibt, wenn $0{,}2 < \nu_m \leqq \nu_e$ wird. Die Querdehnzahl des Mauerwerks dürfte im allgemeinen in diesen Grenzen liegen, so daß wir ohne merkliche Fehler einfach

$$k_1 = k_2 = 1$$

setzen können.

Durch (13) und (14) sind die beiden statisch unbestimmten Größen p und p_m gegeben; wir können nun die im Eisenmantel und in der Ausmauerung auftretenden Spannungen berechnen. Die Temperatur des Eisenmantels wollen wir als räumlich konstant annehmen; wegen der großen Wärmeleitfähigkeit des Eisens ist der Temperaturabfall in radialer Richtung völlig bedeutungslos, so daß diese Annahme gerechtfertigt ist. Der Eisenmantel wird daher nur durch den Anpreßdruck p nach (13) und den Achsialzug $(-p_e)$ nach (9) beansprucht. Für die Spannungen erhält man

$$(\sigma_\varphi)_e = \frac{p r_0}{\delta_e} = \frac{E_e'}{1 + (E_e' \delta_e / E_m' \delta_m)} \left[q + \beta_m (t_m - t_A) - \beta_e (t_e - t_A) + \frac{p_i r_0}{E_m' \delta_m} \right], \tag{16}$$

$$(\sigma_z)_e = -p_e = (\sigma_\varphi)_e - \frac{p_i r_0 E_e'}{2 (E_e' \delta_e + E_m' \delta_m)}, \tag{17}$$

$$(\sigma_r)_e = -p = -(\sigma_\varphi)_e \frac{\delta_e}{r_0}. \tag{18}$$

Wie man aus diesen Gleichungen erkennt, können die Radialspannungen vernachlässigt werden. Gleichung (16) für $(\sigma_\varphi)_e$ stimmt mit der von *Kirschbaum*[1] angegegebenen Gleichung überein, wenn man E_e' und E_m' durch E_e und E_m ersetzt und $q = 0$ setzt. Dies rührt daher, daß *Kirschbaum* den Einfluß der Kittquellung nicht berücksichtigt und auch die Querdehnungen vernachlässigt. Da mit $\nu_e = 0{,}30$, E_e' etwa 30% größer wird als E_e, so ergeben sich nach (16) größere Mantelbeanspruchungen als nach der von *Kirschbaum* angegebenen Gleichung.

Im Mauerwerk treten neben den Temperaturspannungen die Spannungen infolge des Innendrucks p_i, des Anpreßdrucks p und des Achsialdrucks p_m auf. Für die Spannungen in den äußeren Mauerwerkschichten ($r = r_0$) folgt aus (4)

$$[\sigma_\varphi(r_0)]_m = E_m' \beta_m (t_m - t_e) - (p - p_i) \frac{r_0}{\delta_m}, \tag{19}$$

$$[\sigma_z(r_0)]_m = E_m' \beta_m (t_m - t_e) - p_m, \tag{20}$$

$$[\sigma_r(r_0)]_m = -p. \tag{21}$$

Für die Spannungen am Innenhalbmesser des Mauerwerks folgt

$$[\sigma_\varphi(r_i)]_m = E_m' \beta_m (t_m - t_i) - (p - p_i) \frac{r_0}{\delta_m}, \tag{22}$$

$$[\sigma_z(r_i)]_m = E_m' \beta_m (t_m - t_i) - p_m, \tag{23}$$

$$[\sigma_r(r_i)]_m = -p_i. \tag{24}$$

Hierbei sind p und p_m nach (13) und (14) einzusetzen. Dabei ist t_i die Temperatur der Innenfläche der Ausmauerung; sie ist praktisch gleich der Temperatur, die der Behälterinhalt besitzt. Es ist bemerkenswert, daß die Querkontraktionszahlen ν_e und ν_m nur in der durch (15) gegebenen Kombination mit E_e und E_m auftreten, sonst aber keinen Einfluß haben.

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 331.

Da die Temperaturen t_i, t_e und t_m zeitlich veränderlich sind, verändern sich auch die Spannungen im Behälter mit der Zeit. Im folgenden wird eine graphische Darstellung dieser zeitabhängigen Zusammenhänge gegeben.

3. Das (t_e, t_m)-Diagramm. a) Anheiz- und Abkühlkurven; Nichtablösebedingungen. Die in den letzten Abschnitten entwickelten Gleichungen lassen erkennen, daß die Wärmespannungen vor allem vom Verlauf der mittleren Mauerwerkstemperatur t_m und der Eisenmanteltemperatur t_e abhängen. In Analogie zu einem Vorschlag von *W. Matz*, der für den stationären Zustand ein (t_e, t_i)-Diagramm benutzt, ist es hier vorteilhaft, ein Diagramm mit der Eisenmanteltemperatur t_e als Ordinate und der Mauerwerkstemperatur t_m als Abszisse zu verwenden, um die nichtstationären Vorgänge in der Ausmauerung zu verfolgen.

In dieses (t_e, t_m)-Diagramm kann man zunächst den Verlauf der Eisenmanteltemperatur t_e über der Mauerwerkstemperatur t_m für einen Anheiz- oder Abkühlvorgang eintragen. Es entsteht dabei ein Kurvenzug, wie ihn etwa Abb. 3 zeigt. Jeder Punkt der Kurve entspricht einem bestimmten Wert der Zeit τ. Das Anheizen beginnt zur Zeit $\tau = 0$ bei $t_e = t_m = t_u$ (Umgebungstemperatur) und endet nach (theoretisch) unendlich langer Zeit im stationären Zustand bei $t_e = t_{es}$ und $t_m = t_{ms}$. Die Abkühlung beginnt in diesem Zustand und verläuft auf einer anderen Kurve zurück in den ausgeglichenen Zustand $t_e = t_m = t_u$, der nach längerer Zeit erreicht wird.

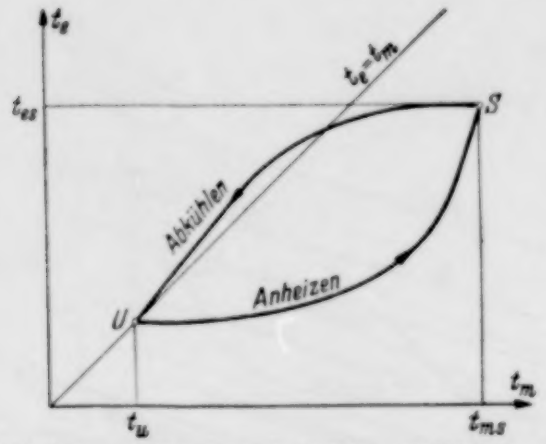

Abb. 3. (t_e, t_m)-Diagramm mit Anheiz- und Abkühlkurve (schematisch).

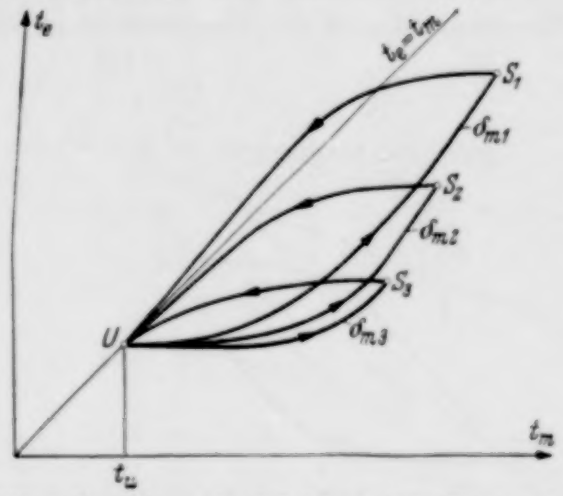

Abb. 4. Veränderung der Anheiz- und Abkühlkurven mit der Ausmauerungsdicke δ_m ($\delta_{m1} < \delta_{m2} < \delta_{m3}$).

Aus der instationären Temperaturverteilung in der Behälterwand lassen sich die Temperaturen t_e und t_m berechnen[1] und zusammengehörige Werte in das (t_e, t_m)-Diagramm eintragen. Der Verlauf der so erhaltenen Kurven hängt von den Bedingungen ab, unter denen Anheizen und Abkühlen erfolgen, also von den Stoffwerten, den Wärmeübergangsverhältnissen, der Art der Beheizung und auch von der Mauerwerksdicke δ_m, dagegen praktisch nicht von der Dicke δ_e des Eisenmantels.

In Abb. 4 kommt diese Abhängigkeit von δ_m qualitativ zum Ausdruck, wobei alle anderen Größen (z. B. Umgebungstemperatur, maximale Innentemperatur, Wärmeübergangszahl α, etc.) konstant gehalten sind. In jedem Falle charakteristisch ist der Kurvenverlauf bei Beginn der Abkühlung bzw. des Aufheizens. Hier bleibt infolge der Wärmespeicherung der Wand t_e praktisch konstant, während t_m sich ändert: Die Anheiz- und Abkühlkurven beginnen stets mit horizontalen Tangenten.

Beim Beginn des Abkühlens bleibt also die Dehnung des Eisenmantels fast gleich, während sich infolge der Erniedrigung von t_m das Mauerwerk zusammenzieht. Es besteht somit die Gefahr, daß sich Eisenmantel und Mauerwerk voneinander lösen. Damit dies nicht eintritt, muß stets ein Anpreß*druck* p zwischen Ausmauerung und Eisenmantel bestehen. Da p als Druck eingeführt wurde, lautet die Nichtablösebedingung

$$p \geqq 0 ,$$

Mit (13) erhält man hieraus

$$q + \beta_m (t_m - t_A) - \beta_e (t_e - t_A) + \frac{p_i r_0}{E'_m \delta_m} \geqq 0 .$$

[1] Vgl. hierzu z. B. Untersuchungen von *W. Matz*, Chemie-Ing.-Techn. 23 (1951) S. 543, *U. Troltenier*, Allg. Wärmetech. 6 (1955) S. 105 u. 5 (1954) S. 100; *H. D. Baehr*, Chemie-Ing.-Techn. 26 (1954) S. 603 u. 673 und eine noch zu veröffentlichende Arbeit des Verfassers.

Da auch beim Innendruck $p_i = 0$ keine Ablösung erfolgen darf, muß auch

$$q + \beta_m (t_m - t_A) - \beta_e (t_e - t_A) \geqq 0$$

sein. Das bedeutet, daß die Eisenmanteltemperatur t_e stets unter einer oberen Grenztemperatur $t_{e\infty}$ liegen muß:

$$t_e \leqq t_{e\infty} = \frac{\beta_m}{\beta_e} t_m + \frac{q}{\beta_e} + \left(1 - \frac{\beta_m}{\beta_e}\right) t_A . \tag{25}$$

Eine genügend große Kittquellung q und eine hohe Ausmauerungstemperatur t_A sind also von Vorteil, letztes jedoch nur, wenn $\beta_e > \beta_m$ ist.

In das (t_e, t_m)-Diagramm (Abb. 5) kann man die durch (25) gegebene Gerade einzeichnen. Es tritt dann keine Ablösung auf, wenn die Anheiz- und Abkühlungskurven stets unterhalb dieser oberen Grenzgeraden

$$t_{e\infty} = \frac{\beta_m}{\beta_e} t_m + \frac{q}{\beta_e} + \left(1 - \frac{\beta_m}{\beta_e}\right) t_A \tag{26}$$

verlaufen. Man erkennt aus dem (t_e, t_m)-Diagramm sofort, daß die Gefahr einer Ablösung am größten im stationären Zustand und bei der Abkühlung ist. Je größer δ_m ist, desto geringer wird die Gefahr der Ablösung.

b) Beanspruchung des Eisenmantels. Infolge des Anpreßdruckes zwischen Mauerwerk und Eisenmantel wird der Eisenmantel auf Zug beansprucht. Die dabei entstehenden Spannungen

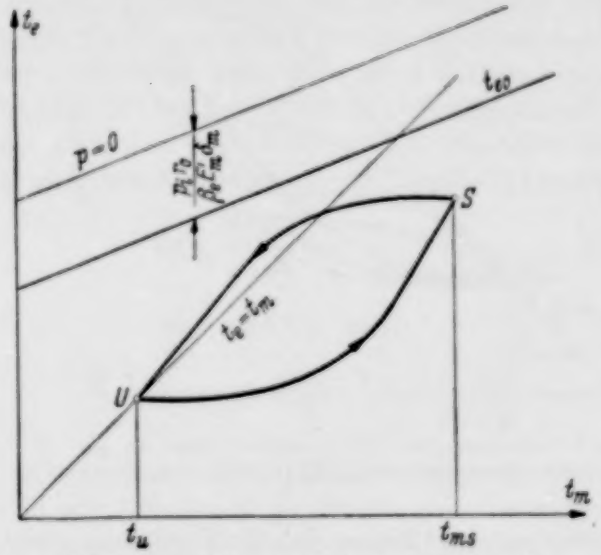

Abb. 5. (t_e, t_m)-Diagramm mit oberer Grenzgeraden und Geraden $p = 0$.

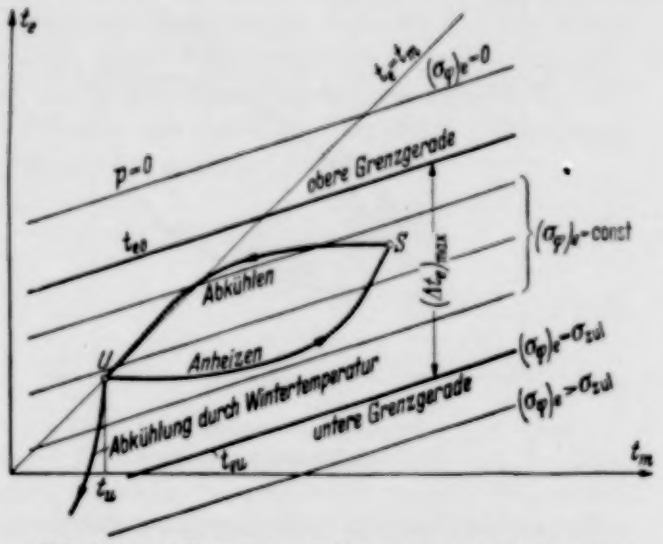

Abb. 6. (t_e, t_m)-Diagramm mit Spannungsgeraden $(\sigma_\varphi)_e$ = const und mit unterer Grenzgeraden.

sind durch (16), (17) und (18) gegeben. Da die Spannung $(\sigma_r)_e$ gegenüber den anderen Spannungen vernachlässigbar klein ist, kann man den Spannungszustand im Eisenmantel als ebenen Spannungszustand mit den beiden Hauptspannungen $(\sigma_\varphi)_e$ und $(\sigma_z)_e$ ansehen.

Auch im (t_e, t_m)-Diagramm kann man sich die Größe der auftretenden Spannungen veranschaulichen. Alle Zustände mit gleicher Tangentialspannung $(\sigma_\varphi)_e$ liegen auf Geraden, für die man nach (16) die Gleichung

$$t_e = \frac{\beta_m}{\beta_e} t_m + \frac{q}{\beta_e} + \left(1 - \frac{\beta_m}{\beta_e}\right) t_A + \frac{p_i r_0}{\beta_e \delta_m E'_m} - \left(1 + \frac{E'_e \delta_e}{E'_m \delta_m}\right) \frac{(\sigma_\varphi)_e}{\beta_e E'_e} \tag{27}$$

findet. Nach (26) sind diese Spannungsgeraden $(\sigma_\varphi)_e = \text{const}$ Parallelen zur oberen Grenzgeraden mit dem Abstand

$$\Delta t_e = t_{e\infty} - t_e = \frac{(\sigma_\varphi)_e}{\beta_e E'_e} \left(1 + \frac{E'_e \delta_e}{E'_m \delta_m}\right) - \frac{p_i r_0}{\beta_e E'_m \delta_m} . \tag{27a}$$

Man kann also in das (t_e, t_m)-Diagramm diese Geraden einzeichnen und kann dann für jeden Punkt der Anheiz- oder Abkühlkurve die im Eisenmantel auftretende Tangentialspannung ablesen (Abb. 6).

Die obere Grenzgerade selbst ist ebenfalls eine Linie konstanter Spannung $(\sigma_\varphi)_e$. Sie gibt die Spannungen an, die allein durch den Innendruck p_i hervorgerufen werden.

Die Beanspruchung im Eisenmantel darf eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Legt man zur Beurteilung der Festigkeit des Eisenmantels etwa die *Mohr*sche Hypothese von der größten Schubspannung zugrunde, so gilt

$$(\sigma_e)_{zul} \geqq \sigma_v = 2\,\tau_{max} = (\sigma_\varphi)_e - (\sigma_r)_e \approx (\sigma_\varphi)_e . \tag{28}$$

Es gibt somit eine untere Grenzgerade t_{eu}, die von der oberen Grenzgeraden t_{eo} den Abstand

$$(\Delta t_e)_{max} = t_{eo} - t_{eu} = \frac{(\sigma_e)_{zul}}{\beta_e E_e'} \left(1 + \frac{E_e' \delta_e}{E_m' \delta_m}\right) - \frac{p_i r_0}{\beta_e E_m' \delta_m} \tag{29}$$

hat. Diese untere Grenzgerade darf im (t_e, t_m)-Diagramm von den Anheiz- bzw. Abkühlkurven nicht unterschritten werden.

Wie man aus Abb. 6 erkennt, besteht diese Gefahr beim Anheizen des Behälters, wo der Eisenmantel infolge seiner niedrigen Temperatur sich nur wenig dehnt und die Last des sich stark ausdehnenden Mauerwerks zu ertragen hat. Die gleiche Gefahr besteht auch, wenn sich der Eisenmantel durch Zugluft oder Wintertemperaturen stark abkühlt, während die Mauerwerkstemperatur t_m noch praktisch konstant bleibt. Auf diese Gefahr wiesen besonders *Kirschbaum* und *Matz* hin.

c) Spannungen im Mauerwerk. Eine weitere Einschränkung für den Verlauf der Anheiz- und Abkühlkurven ergibt sich durch die Forderung, daß im Mauerwerk keine Zugspannungen auftreten dürfen. Diese müssen vielmehr durch einen genügend hohen Anpreßdruck p bzw. Achsialdruck p_m unterdrückt werden. Ob hierbei Zugspannungen eher in den inneren als in den äußeren Schichten der Ausmauerung auftreten, hängt nach (19) und (22) von den Temperaturen t_i und t_e ab. Ist $t_i > t_e$, so sind die äußeren Schichten eher gefährdet als die inneren; für $t_i < t_e$ tritt das Gegenteil ein.

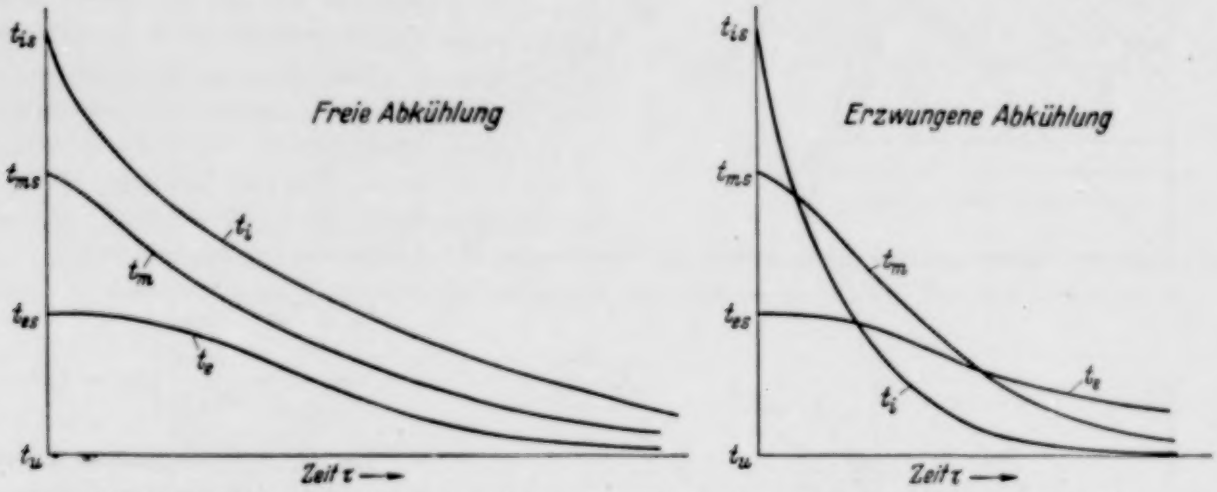

Abb. 7. Zeitlicher Verlauf der Temperaturen t_i, t_m und t_e bei freier und erzwungener Abkühlung (schematisch).

Beim Anheizen und im stationären Zustand ist stets $t_i > t_e$; bei der Abkühlung muß man zwischen freier und erzwungener Abkühlung unterscheiden. Der erste Fall tritt ein, wenn die innere Beheizung des Behälters abgeschaltet wird und er seinen Wärmeinhalt nach außen nur durch Wärmeleitung in der Wand und Wärmeübergang am Mantel abgibt. Bei der erzwungenen Abkühlung dagegen wird der Behälter auch von innen gekühlt, indem durch ihn kalte Gase oder Flüssigkeiten hindurch geleitet werden. Abb. 7 zeigt in schematischer Weise den zeitlichen Verlauf der Temperaturen t_i, t_m und t_e in den beiden Fällen. Wie man hieraus ersieht, ist auch stets bei der freien Abkühlung $t_i > t_e$. Bei der erzwungenen Abkühlung kann für gewisse Bereiche des Abkühlungsvorgangs $t_i < t_e$ werden, so daß dann Zugspannungen zuerst in den inneren Mauerwerksschichten auftreten.

Aus (19), (20), (22) und (23) folgt, daß stets

$$(\sigma_\varphi)_m > (\sigma_z)_m \tag{30}$$

ist, somit

$$[\sigma_\varphi(r_0)]_m \geqq 0 \tag{30a}$$

und

$$[\sigma_\varphi(r_i)]_m \geqq 0 \tag{30b}$$

die maßgebenden Forderungen sind, damit keine Zugspannungen im Mauerwerk auftreten. Formt man (30a) unter Benutzung der Beziehungen (19) und (13) um, so folgt

$$t_m \leqq t_{mo} = \left[1 - \left(\frac{\beta_e}{\beta_m} - 1\right) \frac{E_e' \delta_e}{E_m' \delta_m}\right] t_e + \frac{q}{\beta_m} \frac{E_e' \delta_e}{E_m' \delta_m} - \frac{p_i r_0}{\beta_m E_m' \delta_m} + \left(\frac{\beta_e}{\beta_m} - 1\right) \frac{E_e' \delta_e}{E_m' \delta_m} t_A . \tag{31}$$

Gleichung (31) stellt im (t_e, t_m)-Diagramm wieder eine Gerade dar. Die Anheiz- und Abkühlkurven müssen links von dieser rechten Grenzgeraden verlaufen, sonst treten Zugspannungen im Mauerwerk auf, was vermieden werden muß.

Die Lage der rechten Grenzgeraden hängt von den Stoffwerten β_e, β_m, E_e', E_m' und q, vom Innendruck p_i und vor allem von der Mauerwandstärke δ_m und der Eisenmanteldicke δ_e ab. Betrachtet man z. B. alle Grenzgeraden, die sich für konstante Werte von β_e, β_m, q, p_i, E_m', δ_m, aber variable Werte von $E_e'\,\delta_e$ ergeben, so findet man das interessante Ergebnis, daß alle Grenzgeraden im t_e, t_m-Diagramm durch einen Fixpunkt mit den Koordinaten

$$t_e = t_A + \frac{q}{\beta_e - \beta_m}, \qquad t_m = t_A + \frac{q}{\beta_e - \beta_m} - \frac{p_i\, r_0}{\beta_m E_m' \delta_m} \tag{32}$$

gehen. Man findet diesen Fixpunkt F, indem man vom Schnittpunkt der oberen Grenzgeraden nach (26) mit der Winkelhalbierenden $t_e = t_m$ horizontal nach links bis zum Schnitt mit der Geraden $p = 0$ geht, die parallel zur oberen Grenzgeraden verläuft (Abb. 8). Die Neigung der Geraden durch diesen Fixpunkt hängt von der Eisenmanteldicke δ_e ab. Abb. 8a und 8b zeigen die hierbei auftretenden Verhältnisse, auf die wir bei der Berechnung der Ausmauerung noch zurückkommen.

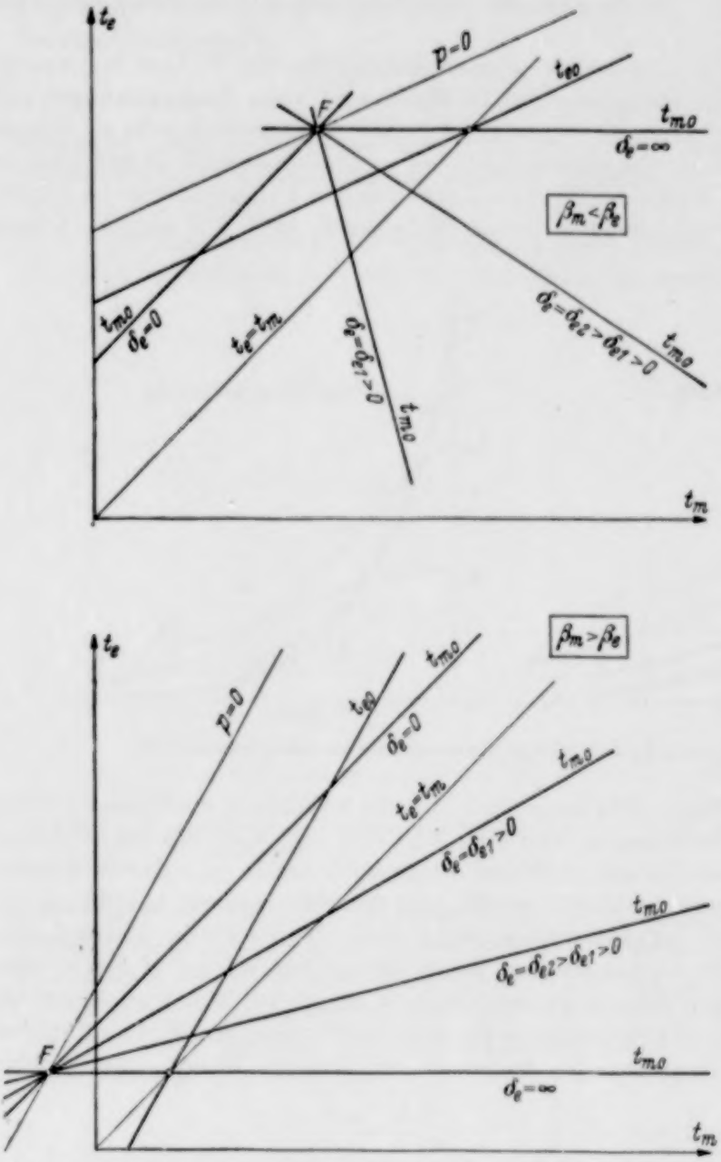

Abb. 8a und 8b. Rechte Grenzgeraden nach (31) für $\beta_m < \beta_e$ und $\beta_m > \beta_e$ und verschiedene Werte von δ_e mit Fixpunkt F nach (32).

Sollen an der Innenseite der Ausmauerung keine Zugspannungen auftreten, so muß Gleichung (30b) erfüllt sein. Hieraus gewinnt man wieder eine Bedingung für die mittlere Mauerwerkstemperatur t_m:

$$t_m \leqq t_{mi} = t_{mo} + \left[1 + \frac{E_e'\,\delta_e}{E_m'\,\delta_m}\right](t_i - t_e)\,. \tag{33}$$

Im (t_e, t_m)-Diagramm kann man nun über der rechten Grenzgeraden t_{mo} in horizontaler Richtung die Differenzkurve $(t_{mi} - t_{mo})$ nach (33) eintragen. Dies braucht zunächst nur für die erzwungene Abkühlung durchgeführt zu werden. Sollen in den inneren Schichten der Ausmauerung keine Zugspannungen auftreten, so muß nach (33) die Abkühlkurve stets links von der Grenzkurve t_{mi} liegen (Abb. 9).

Auch die Größe der im Mauerwerk auftretenden Druckspannung kann aus dem (t_e, t_m)-Diagramm abgelesen werden. Die größten Druckspannungen treten an den inneren Schichten des Mauerwerks auf, und zwar beim Anheizen. Da nach (30) für negative Werte von $(\sigma_\varphi)_m$ und $(\sigma_z)_m$, also für Druckspannungen

$$|(\sigma_z)_m| > |(\sigma_\varphi)_m|$$

gilt, ist hier der Wert von $[\sigma_z(r_i)]_m$ maßgebend. Aus (23) und (14) erhält man

$$[\sigma_z(r_i)]_m = -E_m'\,\beta_m \frac{t_{mi} - t_m + (p_i\, r_0/2\,\beta_m\, E_m'\,\delta_m)}{1 + (E_e'\,\delta_e/E_m'\,\delta_m)}\,. \tag{34}$$

Trägt man auch für das Anheizen die Grenztemperatur t_{mi} nach (33) in das (t_e, t_m)-Diagramm ein, so kann man den Augenblick größter Druckbeanspruchung als jenen Punkt der Anheizkurve

festlegen, der den größten Abstand

$$\Delta t_m = t_{mi} - t_m$$

in horizontaler Richtung von der Grenzkurve t_{mi} für das Anheizen hat. Zugleich kann man die in (34) zur Berechnung von $[\sigma_z(r_i)]_m$ benötigte Differenz $t_{mi} - t_m$ unmittelbar aus dem (t_e, t_m)-Diagramm abgreifen (Abb. 10).

Für das Anheizen und Abkühlen ergeben sich stets verschiedene Grenzkurven t_{mi}, da der zeitliche Verlauf der Innentemperatur t_i in beiden Fällen verschieden ist.

4. Die Berechnung der Ausmauerung. An Hand der im letzten Abschnitt entwickelten Beziehungen ist es möglich festzustellen, ob eine gegebene Ausmauerung den im Betrieb auftretenden Belastungen gewachsen ist, oder jene Betriebsbedingungen festzulegen, unter denen der ausgemauerte Behälter sich zufriedenstellend verhält. Im folgenden werden nun Richtlinien aufgestellt, nach denen eine neue Ausmauerung für bestimmte Betriebsverhältnisse berechnet werden kann.

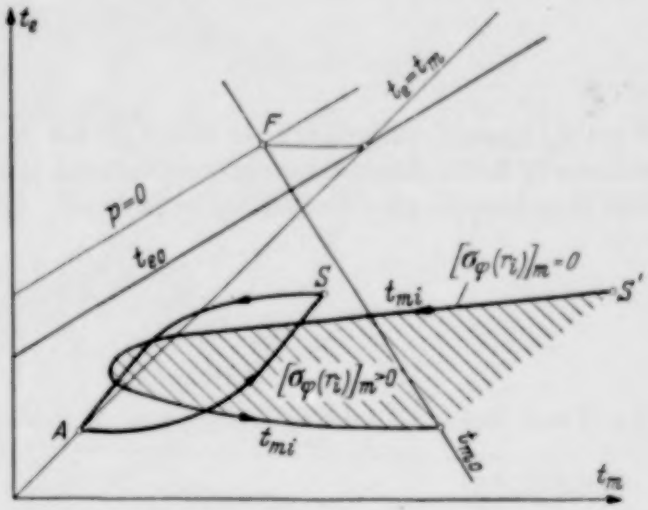

Abb. 9. (t_e, t_m)-Diagramm mit rechter Grenzgeraden und Grenzkurve t_{mi} für die Abkühlung nach (33).

a) Berechnung für stationären Temperaturverlauf[1]. Die Berechnung einer Ausmauerung wird vereinfacht, wenn man nur den stationären Betriebszustand des Behälters betrachtet, wo der Temperaturverlauf in der Ausmauerung zeitlich unverändert ist. Die hierbei gewonnenen Ergebnisse bilden die Grundlage für die Berechnung der Ausmauerung bei Anheiz- und Abkühlvorgängen, wo einige wesentliche Ergänzungen gegenüber dem Berechnungsverfahren für den stationären Zustand erforderlich sind.

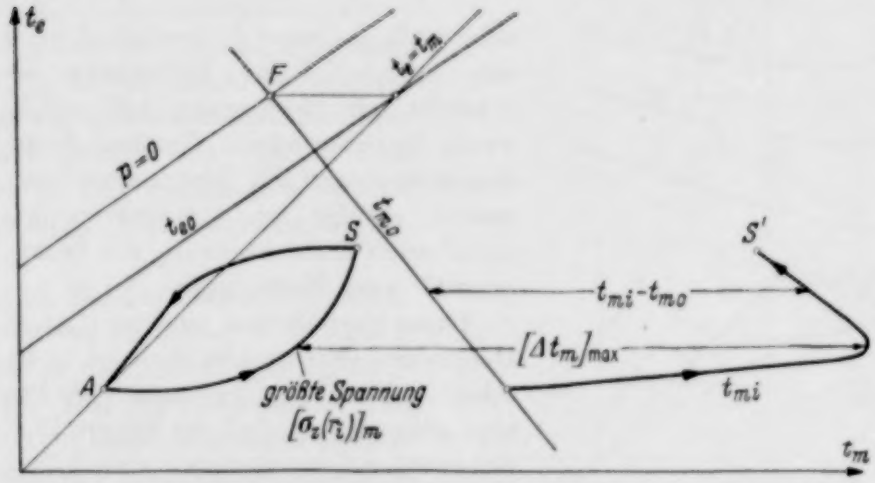

Abb. 10. Ermittlung der größten Druckspannung in der Ausmauerung mit Hilfe der Differenzkurve für das Anheizen.

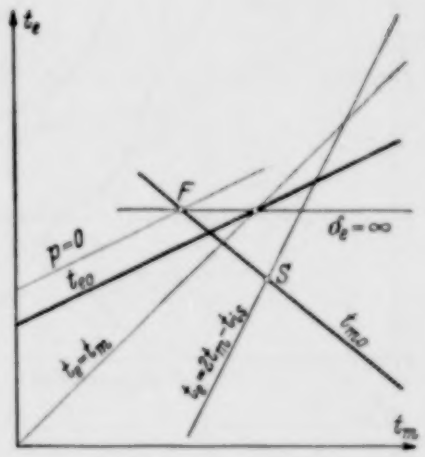

Abb. 11. (t_e, t_m)-Diagramm, Berechnung für den stationären Zustand.

Zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen setzen wir die Umgebungstemperatur t_u und die Ausmauerungstemperatur t_A einander gleich. Die Krümmung der Behälterwände soll für die Berechnung der Temperaturen vernachlässigt werden können. Es gilt dann für die mittlere Mauerwerkstemperatur t_{ms} im stationären Zustand

$$t_{ms} = t_A + \frac{K+2}{K+1} \frac{t_{is} - t_A}{2} \tag{35}$$

und für die Eisenmanteltemperatur

$$t_{es} = t_A + \frac{t_{is} - t_A}{K+1}. \tag{36}$$

[1] Diese Aufgabe wurde von *Matz* (vgl. Fußnote 2 von S. 331) ausführlich behandelt. Da auf S. 12 der Arbeit von *Matz* bei der Berechnung der Dehnungen irrtümlich eine elastische Dehnung für eine Gesamtdehnung (elastische + Wärmedehnung) angesehen wurde, sind zahlreiche Gleichungen dieser Abhandlungen unrichtig.

Hierbei bedeutet t_{is} die Innentemperatur im stationären Zustand, und es ist $K = \alpha\,\delta_m/\lambda_m$, wo α die Wärmeübergangszahl und λ_m die Wärmeleitzahl des Mauerwerks bedeuten. Der Wärmeleitwiderstand des dünnen Eisenmantels ist vernachlässigbar klein.

Im (t_e, t_m)-Diagramm liegen alle stationären Zustände auf der „stationären Geraden"

$$t_e = 2\,t_m - t_{is}\,, \tag{37}$$

deren einzelne Punkte zu den verschiedenen Werten von K gehören.

Setzt man t_{ms} und t_{es} in die Nichtablösebedingung (25) ein, so erhält man eine untere Grenze für die Mauerwandstärke δ_m:

$$K = \frac{\alpha\,\delta_m}{\lambda_m} \geqq \frac{(\beta_e - \beta_m)\,(t_{is} - t_A) - q}{\dfrac{\beta_m}{2}\,(t_{is} - t_A) + q}\,. \tag{38}$$

Wird δ_m kleiner ausgeführt, so löst sich das Mauerwerk vom Eisenmantel ab. Damit in der Ausmauerung keine Zugspannungen auftreten, muß Gleichung (31) erfüllt sein. Mit (35) und (36) erhält man hieraus eine Beziehung zwischen δ_m und δ_e:

$$\frac{\alpha\,\delta_e}{\lambda_m} \geqq \frac{E_m'}{E_e'}\,\frac{K^2\,\dfrac{\beta_m}{2\,q}\,(t_{is} - t_A) + (K+1)\,\dfrac{\alpha\,r_0}{\lambda_m}\,\dfrac{p_i}{E_m'\,q}}{K - \left[\dfrac{\beta_e - \beta_m}{q}\,(t_{is} - t_A) - 1\right]}\,. \tag{39}$$

An Hand dieser Gleichung kann man zu jedem Wert von K bzw. δ_m einen Mindestwert der Eisenmanteldicke δ_e berechnen, der erforderlich ist, um die Zugspannungen im Mauerwerk zu unterdrücken.

Zunächst erkennt man aus (39), daß stets

$$K = \frac{\alpha\,\delta_m}{\lambda_m} > \frac{\beta_e - \beta_m}{q}\,(t_{is} - t_A) - 1 \tag{40}$$

sein muß, da sonst δ_e unendlich groß sein würde. Diese Bedingung ist schärfer als Bedingung (38), d. h. wenn im stationären Zustand keine Zugspannungen im Mauerwerk auftreten, erfolgt im stationären Zustand auch keine Ablösung des Eisenmantels vom Mauerwerk.

Diese Verhältnisse sind im (t_e, t_m)-Diagramm sehr anschaulich zu übersehen (Abb. 11). Gleichung (40) besagt geometrisch, daß der Fixpunkt F der rechten Grenzgeraden stets höher liegen muß als der stationäre Punkt $S(t_{es}, t_{ms})$. Man erkennt dann sofort, daß in diesem Falle S dann auch stets unterhalb der oberen Grenzgeraden liegt.

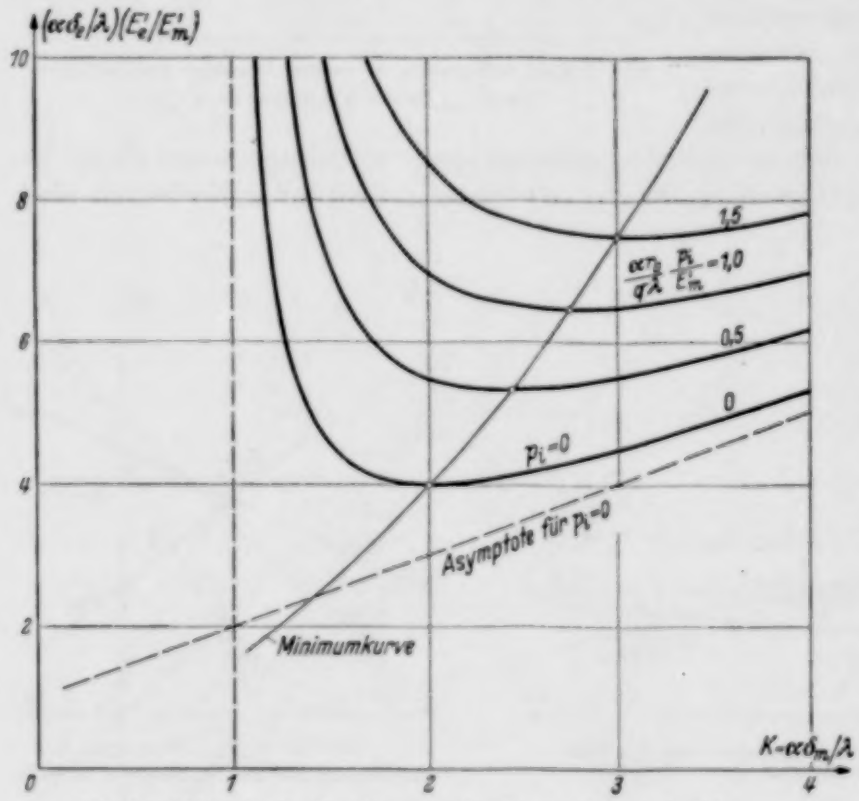

Abb. 12. Abhängigkeit der Eisenmantelstärke von $K = \alpha\,\delta_m/\lambda$ für $\beta_e = 1{,}2 \cdot 10^{-5}/°C$, $\beta_m = 0{,}6 \cdot 10^{-5}/°C$, $q = 30 \cdot 10^{-5}$, $t_{is} - t_A = 100°C$.

Sehr bemerkenswert ist die Abhängigkeit der Eisenmantelstärke δ_e von K bzw. δ_m nach (39). Abb. 12 zeigt für $\beta_e = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,1/°C$, $\beta_m = 0{,}6 \cdot 10^{-5}\,1/°C$, $q = 30 \cdot 10^{-5}$, $t_{is} - t_A = 100\,°C$ den Zusammenhang zwischen $\frac{\alpha\,\delta_e}{\lambda_m}\frac{E_e'}{E_m'}$ und K mit dem Parameter $\frac{\alpha\,r_0}{\lambda_m}\frac{p_i}{q\,E_m'}$. Man erkennt, daß es für jeden Druck p_i einen bestimmten Wert K_M gibt, für den die Eisenmanteldicke δ_e ein Minimum wird. K_M ergibt sich aus (39) durch Differentiieren zu

$$K_M = \frac{\alpha\,\delta_{mM}}{\lambda_m} = \left[\frac{\beta_e - \beta_m}{q}\,(t_{is} - t_A) - 1\right] + \sqrt{\left[\frac{\beta_e - \beta_m}{q}\,(t_{is} - t_A) - 1\right]^2 + 2\,\frac{\beta_e - \beta_m}{q\,\beta_m}\,\frac{\alpha\,r_0}{\lambda_m}\,\frac{p_i}{E_m'}}\,. \tag{41}$$

Für diese „Minimumsmauerdicke" δ_{mM} wird die Eisenmanteldicke δ_e am kleinsten und damit der Eisenmantel am billigsten. K_M ist nur dann positiv, wenn $\beta_m < \beta_e$ ist.

Es ist somit empfehlenswert, für δ_m den Wert δ_{mM} zu wählen. Da die Minima in Abb. 12 durchweg sehr flach sind, kann man für δ_{mM} ohne weiteres Abweichungen von $\pm$ 20% zulassen. δ_e muß dann mindestens so groß ausgeführt werden, wie es (39) verlangt. Damit sind δ_m und δ_e festgelegt und man kann mit Hilfe von (16) die Beanspruchung des Eisenmantels, mittels (19) bis (24) die Spannungen im Mauerwerk für den stationären Zustand berechnen.

b) Verhalten einer für den stationären Zustand berechneten Ausmauerung beim Anheizen und Abkühlen. Eine Ausmauerung, die nur unter Berücksichtigung des stationären Betriebszustandes dimensioniert ist, kann beim Anheizen oder Abkühlen des Behälters versagen. An Hand des (t_e, t_m)-Diagramms kann man die hierbei auftretenden Gefahren leicht erkennen.

In Abb. 13 sind eine typische Anheiz- und Abkühlkurve eingezeichnet. Die rechte Grenzgerade läuft durch den stationären Punkt S, der selbst unterhalb der oberen Grenzgeraden liegt. Hier können nun fünf Gefahren bestehen:

1. Die Abkühlkurve schneidet die obere Grenzgerade: Das Mauerwerk löst sich vom Eisenmantel.

2. Die Anheizkurve schneidet die untere Grenzgerade: Die Mantelbeanspruchung überschreitet die zulässige Grenze.

3. Die Anheizkurve schneidet die rechte Grenzgerade oder liegt ganz rechts von ihr: Es treten Zugspannungen in den äußeren Mauerwerksschichten auf.

4. Bei der erzwungenen Abkühlung schneidet die Abkühlkurve die Grenzkurve t_{mi} nach (33) für die Abkühlung: Es treten Zugspannungen in den inneren Mauerwerksschichten auf.

5. Beim Anheizen wird die Differenz $\Delta t_m = t_{mi} - t_m$ zwischen Anheizkurve und der Grenzkurve t_{mi} nach (33) für das Anheizen zu groß: Es treten unzulässige hohe Druckspannungen $[\sigma_s(r_i)]_m$ im Mauerwerk auf.

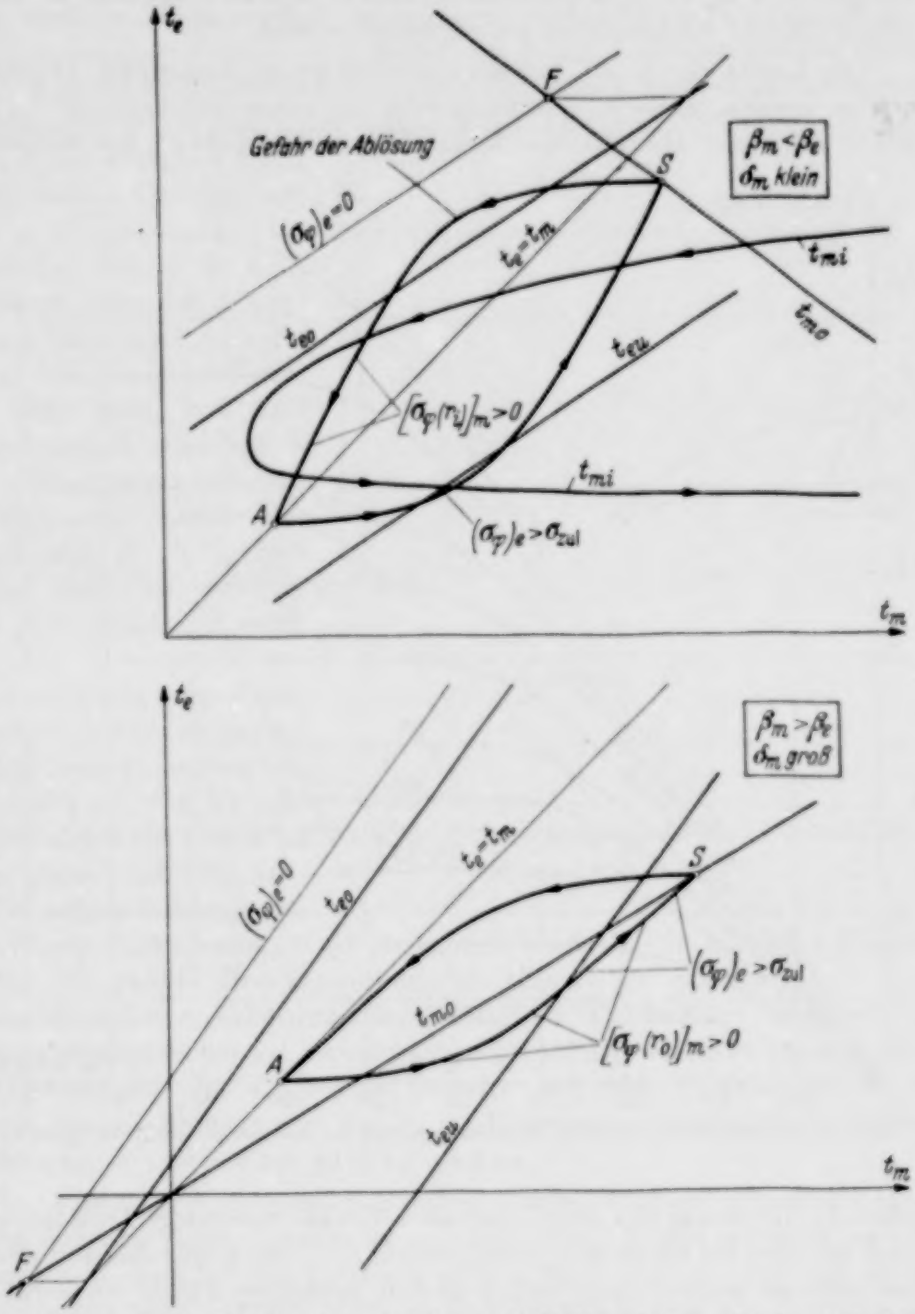

Abb. 13. Mögliche Gefahren beim Anheizen und Abkühlen einer nur für den stationären Zustand berechneten Ausmauerung.

Es genügt also keineswegs, die Ausmauerung nur für den stationären Zustand zu berechnen, sondern man muß die im Betrieb stets auftretenden Anheiz- und Abkühlvorgänge berücksichtigen. Bei manchen Apparaten, z. B. beim Zellstoffkocher, ist der größte Teil des Betriebes nichtstationär, so daß hier der stationäre Zustand ganz in den Hintergrund tritt.

Die *Gefahr der Ablösung* ist leicht durch konstruktive Maßnahmen zu beheben. Aus dem (t_e, t_m)-Diagramm, (z. B. Abb. 11) erkennt man sofort, daß ein Ablösen einer für den stationären Zustand berechneten Ausmauerung vom Eisenmantel ausgeschlossen ist, wenn nur

$$t_e \leqq t_m$$

ist. Dies trifft aber bei allen Vorgängen der freien Abkühlung (vgl. Abb. 7) zu. Ablösung kann also

nur bei erzwungener Abkühlung auftreten, wo der Behälter durch Einleiten kalter Flüssigkeit oder kalter Gase gekühlt wird.

Hier betrachten wir nun den für die Ausmauerung gefährlichsten Fall, daß nämlich die Innentemperatur des Behälters von dem Maximalwert im stationären Zustand plötzlich auf die Umgebungstemperatur abfällt. Abb. 14 zeigt die hierfür berechneten Abkühlkurven in dimensionsloser Darstellung für verschiedene Werte von K. Ist $K > 2$, so bleibt $t_e < t_m$ und eine Ablösung ist auch in diesen Fällen der erzwungenen Abkühlung ausgeschlossen. Ist $K < 2$, d. h. bei kleinen Ausmauerungsdicken δ_m oder schlechtem äußerem Wärmeübergang, so muß die Ablösung durch eine genügend große Kittquellung q verhindert werden.

Die Größe der beim Anheizen auftretenden *maximalen Mantelspannung* muß sehr genau beachtet werden, da diese Spannung sehr viel höher sein kann als die Mantelbeanspruchung im stationären Zustand. Hier ist eine kleine Wärmedehnzahl β_m des Mauerwerks von Vorteil. Konstruktiv kann die Gefahr einer zu hohen Mantelbeanspruchung vor allem durch die Wahl einer möglichst kleinen Ausmauerungsdicke δ_m behoben werden. Bei kleinem δ_m verlaufen nämlich die Anheizkurven steiler (Abb. 4), und nach (29) wächst auch der Abstand der unteren Grenzgeraden mit kleiner werdendem δ_m. Daß die Anheizkurve rechts von der durch den stationären Punkt laufenden rechten Grenzgeraden liegt, also Zugspannungen beim Anheizen auftreten, kommt praktisch nur für $\beta_m > \beta_e$ vor, [vgl. später Abschnitt d)].

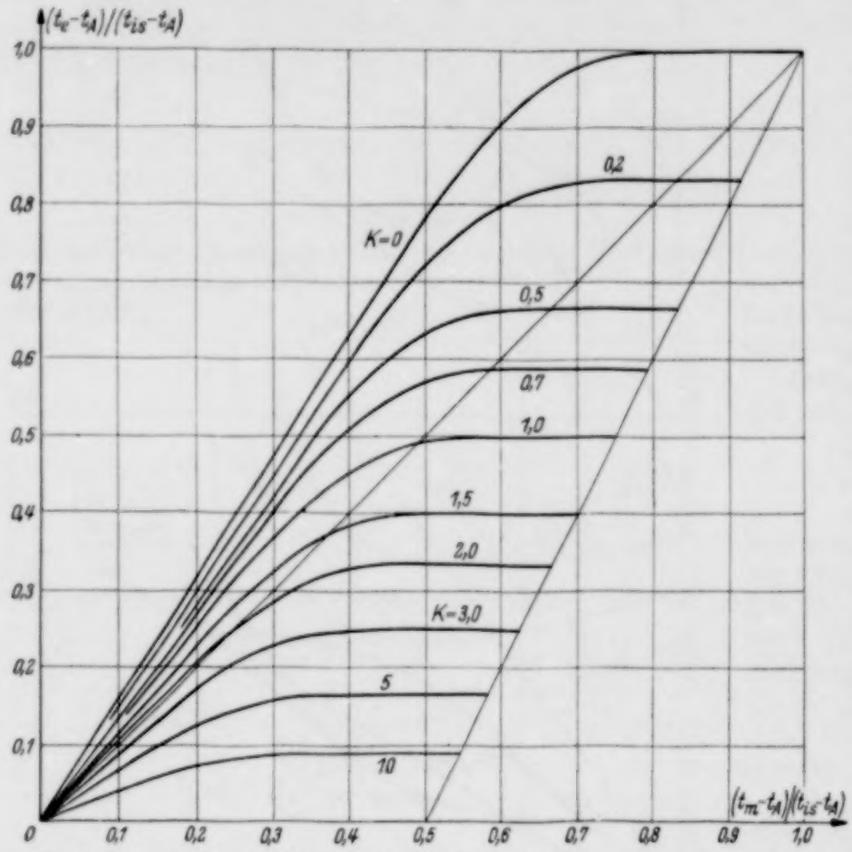

Abb. 14. Dimensionslose Abkühlkurven für einen Sprung der Innentemperatur t_i von t_{iS} auf t_A zur Zeit $\tau = 0$.

Während man bei der erzwungenen Abkühlung die Ablösung des Mauerwerks leicht vermeiden kann, läßt sich jedoch das Auftreten von *Zugspannungen* in den inneren Mauerwerksschichten nur sehr schwer verhindern. Die hierfür maßgebende Gleichung (33) zeigt, daß diese Gefahr besonders dann auftritt, wenn die Größe $E_e' \delta_e / E_m' \delta_m$ groß ist, also bei kleinem δ_m und großem δ_e. Eine große Ausmauerungsdicke und eine kleine Eisenmanteldicke werden sich jedoch in den wenigsten Fällen verwirklichen lassen, ohne mit anderen Forderungen in Konflikt zu geraten.

Sollen somit Zugspannungen bei der Abkühlung vermieden werden, so muß gefordert werden, daß das Einleiten von kalten Flüssigkeiten oder Gasen unterbleibt, daß also nur der harmlose Fall der freien Abkühlung auftritt. Gefährlich ist vor allem ein rascher Sturz der Innentemperatur bei Beginn des Abkühlens. Die inneren Schichten der Ausmauerung ziehen sich dann so rasch und stark zusammen, daß große Zugspannungen auftreten, wodurch Risse in der Ausmauerung entstehen.

c) Berechnung der Ausmauerung für $\beta_m < \beta_e$. Bevor mit der Berechnung der Ausmauerung eines Behälters begonnen werden kann, muß geklärt sein, welchen Beanspruchungen der Behälter hinsichtlich Druck und Temperatur unterworfen ist. Es muß der höchste Betriebsdruck p_i und der zeitliche Verlauf der Eisenmanteltemperatur t_e, der mittleren Mauerwerkstemperatur t_m und der Innentemperatur t_i wenigstens in groben Zügen bekannt sein. Wegen der Unsicherheiten in den Stoffwerten brauchen die Temperaturen nicht besonders genau bekannt zu sein.

Für die Berechnung nehmen wir an, daß die Stoffwerte der Ausmauerung gegeben seien. Hierbei wollen wir, was in den meisten Fällen zutrifft, $\beta_m < \beta_e$ annehmen. Die Aufgabe besteht darin, geeignete Werte von δ_m und δ_e zu ermitteln.

Tritt bei der Abkühlung des Behälters nur der Fall der *freien Abkühlung* auf, so kann δ_m zunächst nach (41) berechnet werden. Man wählt $\delta_m = \delta_{mM}$ also so, daß die Eisenmanteldicke δ_e nach (39) möglichst klein wird, der Eisenmantel also am wirtschaftlichsten ausgeführt wird. Da $t_e < t_m$ ist, besteht keine Gefahr, daß sich die Ausmauerung vom Eisenmantel ablöst. Es können auch keine Zugspannungen im Mauerwerk auftreten, und man muß nur darauf achten, daß die Mantelbeanspruchung nicht zu hoch ist. Man zeichnet sich daher die Anheizkurve in das (t_e, t_m)-Diagramm ein und dazu einige Spannungsgeraden $(\sigma_\varphi)_e$ = konst. nach (27), insbesondere die untere Grenzgerade nach (29). Auf der Anheizkurve läßt sich dann ablesen, welche Mantelbeanspruchung auftritt. Bleibt die Mantelbeanspruchung in tragbaren Grenzen, so ist die Berechnung der Ausmauerung bereits beendet. Ist σ_e zu hoch, so kann man δ_e vergrößern, wodurch die untere Grenzgerade weiter nach unten rückt.

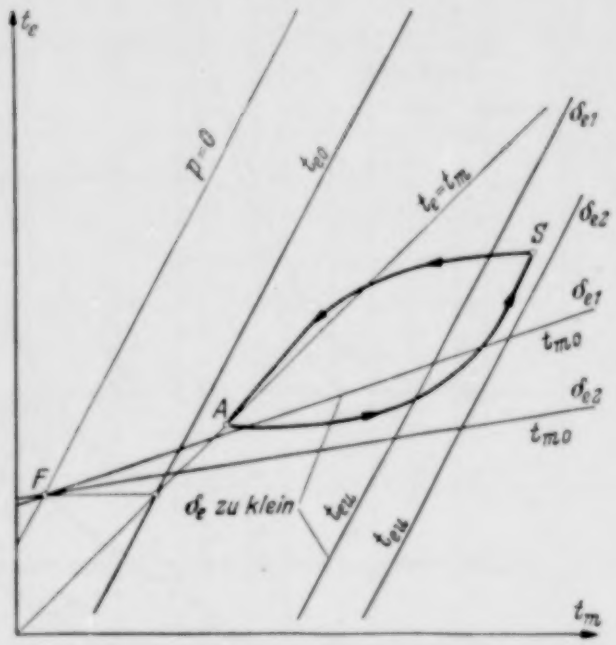

Abb. 15. (t_e, t_m)-Diagramm zur Berechnung der Ausmauerung bei $\beta_e < \beta_m$.

Wirksamer und wirtschaftlicher dürfte es sein, die Mauerstärke δ_m zu verkleinern. Hierdurch verschiebt sich die Anheizkurve nach oben, und auch die untere Grenzgerade rückt tiefer. Allerdings wird nun $K < K_M$, und aus Abb. 12 sieht man, daß nun wesentlich größere Eisenmantelstärken erforderlich sind, um das Auftreten von Zugspannungen im Mauerwerk zu verhindern. Man muß somit versuchen, δ_m zu verkleinern und doch $K = K_M$ beizubehalten. Gleichung (41) lehrt, daß dies vor allem durch eine Vergrößerung der Kittquellung q möglich ist.

Man wird daher versuchen, q soweit zu vergrößern, daß ein genügend kleines K_M erhalten werden kann[1]. Damit ist das (t_e, t_m)-Diagramm neu zu entwerfen. Die Lage der Grenzgeraden und auch die Anheizkurve ändern sich, und es ergibt sich auch eine neue Eisenmanteldicke δ_e. Man hat dann wieder nachzuprüfen, ob die Anheizkurve die untere Grenzgerade schneidet und gegebenenfalls so lange Abänderungen vorzunehmen, bis das nicht mehr der Fall ist. Nach (34) kann man schließlich die größte Druckspannung im Mauerwerk ermitteln.

Während bei der eben behandelten freien Abkühlung der Verlauf der Abkühlkurve ohne wesentliche Bedeutung war, muß die Abkühlkurve bei der *erzwungenen Abkühlung* beachtet werden. Man wird hier wieder K_M nach (41) berechnen. Ist $K_M > 2$, so besteht nach Abb. 14 keine Gefahr der Ablösung. Ist $K_M < 2$, so muß die Abkühlkurve in das (t_e, t_m)-Diagramm eingezeichnet werden, um zu prüfen, ob die obere Grenzgerade geschnitten wird.

Sollte dies der Fall sein, so kann man die Kittquellung q größer wählen, wodurch die obere Grenzgerade nach oben rückt. Sollte dies aus Herstellungsgründen nicht möglich sein, so muß man die Ausmauerungsdicke δ_m so vergrößern, daß die Abkühlkurve so tief rückt, daß sie von der oberen Grenzgeraden nicht mehr geschnitten wird. Damit ist $K > K_M$ festgelegt und die Eisenmanteldicke δ_e kann nach (39) berechnet werden.

Man zeichnet dann die Anheizkurve ein und prüft, ob sie von der unteren Grenzgeraden geschnitten wird. Ist die Mantelbeanspruchung zu hoch, so kann nur δ_e weiter vergrößert werden, da es wegen der Ablösungsgefahr nicht möglich ist, δ_m kleiner zu wählen.

Hat man δ_e geeignet festgelegt, so muß schließlich noch geprüft werden, ob in den inneren Schichten der Ausmauerung bei der erzwungenen Abkühlung Zugspannungen auftreten. Hierzu zeichnet man die Grenzkurve nach (33) in das (t_e, t_m)-Diagramm ein und prüft nach, ob sie stets rechts von der Abkühlkurve verläuft. Ist das nicht der Fall, treten also bei der Abkühlung Zugspannungen auf, so wird sich dies in den wenigsten Fällen durch konstruktive Maßnahmen, etwa durch Vergrößern von δ_m beheben lassen. Es muß vielmehr verlangt werden, daß die Innentemperatur t_i beim Abkühlen weniger schroff abfällt. Die Grenzkurve t_{mi} greift dann nicht so weit nach links aus.

[1] Diese Vergrößerung von q wird sich allerdings aus Herstellungsgründen nicht immer durchführen lassen.

d) Berechnung der Ausmauerung für $\beta_m > \beta_e$. Die bisher aufgestellten Richtlinien für die Berechnung einer Ausmauerung sind an die Bedingung $\beta_m < \beta_e$ geknüpft. Es kann jedoch in einzelnen Fällen, wie die Untersuchung von *Kirschbaum* [1] gezeigt hat, auch $\beta_m > \beta_e$ sein. Es gibt dann keine Minimums-Mauerdicke δ_{mM}, weil sich aus (41) ein negativer Wert ergeben würde, und die Berechnung muß nach etwas anderen Gesichtspunkten durchgeführt werden.

In das (t_e, t_m)-Diagramm kann man zunächst die obere Grenzgerade einzeichnen, die jetzt steiler verläuft als die Gerade $t_e = t_m$ (Abb. 15). Die Gefahr der Ablösung ist nun gering, jedoch die Gefahr einer hohen Mantelbeanspruchung sehr groß. Man wird daher eine möglichst *kleine* Ausmauerungsdicke δ_m willkürlich wählen. Man kann nun die Anheiz- und Abkühlkurve einzeichnen und zunächst prüfen, ob die Abkühlkurve die obere Grenzgerade schneidet, was nur bei erzwungener Abkühlung vorkommen kann. Sollte dies der Fall sein, so muß δ_m vergrößert werden, und die Anheiz- und Abkühlkurven sind neu zu zeichnen.

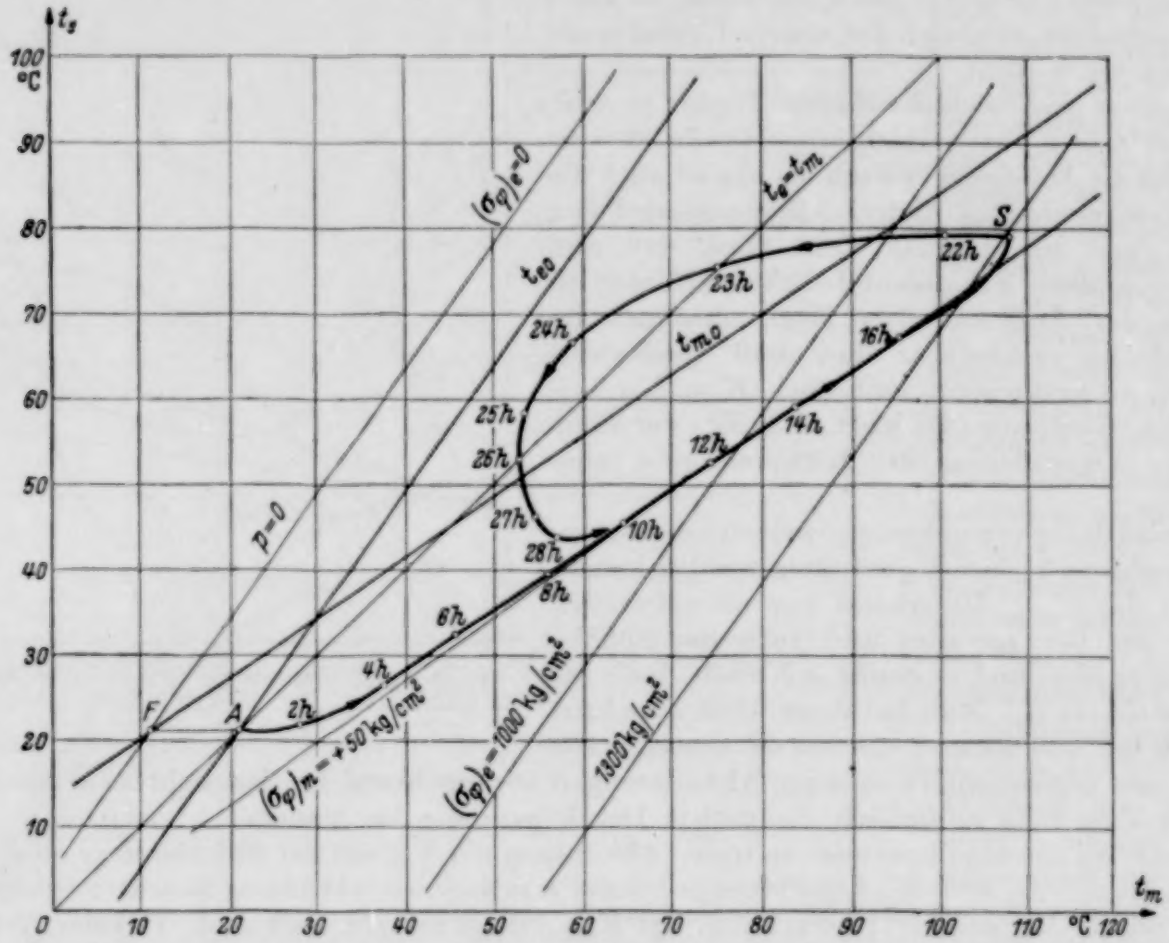

Abb. 16. (t_e, t_m)-Diagramm eines von *E. Kirschbaum* untersuchten Zellstoffkochers für das Anheizen und Abkühlen (Daten vgl. Text).

Hat man δ_m festgelegt, so wird man für mehrere angenommene Werte von δ_e die rechte Grenzgerade und die untere Grenzgerade einzeichnen. Die rechten Grenzgeraden verlaufen alle durch den Fixpunkt F, der jetzt links unterhalb der Anheizkurven liegt (Abb. 15). Man kann dann durch Probieren die kleinste Eisenmantelstärke δ_e aufsuchen, bei der weder Zugspannungen im Mauerwerk noch unzulässig hohe Mantelbeanspruchungen auftreten.

Sollte dieser Wert von δ_e zu groß, der Eisenmantel also zu kostspielig werden, so kann man versuchen, δ_m noch kleiner auszuführen, wodurch sich neue Anheiz- und Abkühlkurven ergeben und die Grenzgeraden in eine günstigere Lage kommen, sodaß δ_e verkleinert werden kann. Man hat hierbei allerdings zu beachten, daß die obere Grenzgerade nicht geschnitten wird. Wirksamer ist hier meist eine Vergrößerung der Quellung q unter gleichzeitiger Verringerung der Ausmauerungsstärke δ_m.

5. Beispiele. a) Nachprüfung eines in Betrieb befindlichen Zellstoffkochers. *E. Kirschbaum* [1] hat an einem in Betrieb befindlichen Zellstoffkocher den zeitlichen Verlauf der drei Temperaturen t_e, t_m, und t_i durch Temperaturmessungen bestimmt. Auf Grund dieser Werte wurden für das erste Ankochen und die daran anschließende Abkühlung des Kochers die Anheiz- und Abkühlkurven in ein (t_e, t_m)-Diagramm eingetragen (Abb. 16).

[1] Vgl. Fußnote 4 von S. 331.

Nach *Kirschbaum* legen wir der Berechnung folgende Stoffwerte zugrunde: $\beta_e = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,1/°C$; $E_e = 21 \cdot 10^{+5}\,kg/cm^2$; $\beta_m = 1{,}74 \cdot 10^{-5}\,1/°C$; $E_m = 3{,}5 \cdot 10^{+5}\,kg/cm^2$. Wir setzen ferner $\nu_e = 0{,}30$ und $\nu_m = 0{,}25$. Da *Kirschbaum* die Quellung des Mauerwerks nicht berücksichtigt, soll auch für dieses Beispiel $q = 0$ gesetzt werden.

Die Abmessungen des Kochers waren $r_0 = 2{,}45$ m, $\delta_m = 0{,}137$ m; $\delta_e = 0{,}028$ m. Der Innendruck beträgt $p_i = 4{,}5$ atü.

Die Umgebungstemperatur bei der ersten Kochung war $t_u = 21°C$. Wir setzen auch $t_A = 21°C$.

Die obere Grenzgerade nach (26) ist dann durch

$$t_{eo} = 1{,}45\,t_m - 9{,}0°C$$

gegeben. Aus Abb. 16 erkennt man, daß die Gefahr einer Ablösung des Mauerwerks vom Eisenmantel nicht besteht.

Parallel zur oberen Grenzgeraden verläuft die Gerade $p = 0$ bzw. $(\sigma_\varphi)_e = 0$. Sie hat nach (27a) den Abstand

$$t_e - t_{eo} = \frac{p_i\,r_0}{\beta_e\,E'_m\,\delta_m} = 14{,}4°C\,.$$

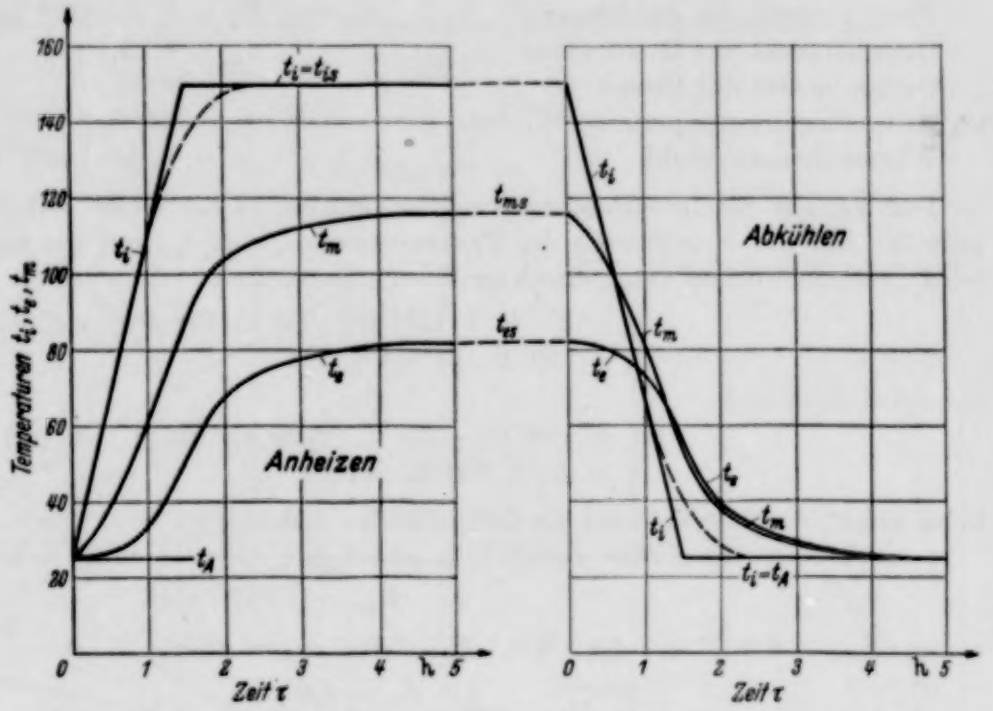

Abb. 17. Zeitlicher Verlauf der Temperaturen t_i, t_m, t_e für das im Text behandelte Beispiel.

Nun kann man leicht den Fixpunkt der rechten Grenzgeraden konstruieren: Der Schnittpunkt der oberen Grenzgeraden mit der Winkelhalbierenden $t_e = t_m$ ist, da $q = 0$, der Ausmauerungspunkt A. Horizontal zu A auf der Geraden $(\sigma_\varphi)_e = 0$ liegt F, und man kann nach (31) die rechte Grenzgerade einzeichnen:

$$t_{mo} = 1{,}407\,t_e - 18{,}5°C\,.$$

Die rechte Grenzgerade schneidet die Abkühlkurve. Da die gesamte Anheizkurve rechts von der rechten Grenzgeraden liegt, treten in der Ausmauerung beim Anheizen Zugspannungen auf. Nach (19) ist eine Gerade $[\sigma_\varphi(r_0)]_m = 50\,kg/cm^2$ eingezeichnet. Man sieht daraus, daß die Zugspannungen etwa diesen Wert erreichen, den das Mauerwerk kaum aufnehmen kann ohne zu reißen.

Auch die Beanspruchung des Eisenmantels ist sehr hoch. Nach (27) sind zwei Geraden eingezeichnet, für die $(\sigma_\varphi)_e = 1000\,kg/cm^2$ bzw. $1300\,kg/cm^2$ ist. Die maximale Beanspruchung tritt, wie man aus Abb. 16 erkennt, kurz vor Beendigung des Anheizens auf, was mit der Berechnung von *Kirschbaum* übereinstimmt[1].

Die Ausmauerung des Zellstoffkochers muß als mangelhaft angesehen werden, da im Mauerwerk Zugspannungen beträchtlicher Größe auftreten (bei der Abkühlung auch in den inneren Mauerwerksschichten) und da die Mantelbeanspruchung sehr hoch ist. Dies ist vor allem auf die sehr große Wärmedehnzahl des Mauerwerks und auf das Fehlen einer Kittquellung zurückzuführen. Würde man die Quellung des Mauerwerks in Rechnung stellen, so würden die Zugspannungen unterdrückt werden, da bei $q > 0$ die rechte Grenzgerade nach unten wandert. Die Mantelbeanspruchung würde sich jedoch vergrößern.

Eine Verbesserung würde auch eine kleinere Ausmauerungsdicke δ_m bringen. Hierdurch würde insbesondere die Mantelbeanspruchung kleiner werden, weil die Spannungsgeraden dann einen größeren Abstand voneinander hätten und außerdem die Anheizkurve etwas steiler verliefe.

b) Neuberechnung eines ausgemauerten Behälters. Es soll die Ausmauerung eines zylinderförmigen Behälters berechnet werden, wenn folgende Abmessungen und Stoffwerte gegeben sind.

---

[1] Die maximale Spannung ist jedoch rund 30% größer als sie *Kirschbaum* berechnet, da hier noch der Einfluß der Querdehnungen berücksichtigt ist.

Innerer Radius des Eisenmantels	$r_0 = 0{,}85$ m,
Höchster Innendruck	$p_i = 8{,}0$ atü,
Wärmeleitzahl der Ausmauerung	$\lambda_m = 0{,}9$ kcal/mh°C,
Temperaturleitzahl der Ausmauerung	$a = 0{,}0028$ m²/h,
Wärmedehnzahl des Mauerwerks	$\beta_m = 0{,}7 \cdot 10^{-5}$ 1/°C,
Wärmedehnzahl des Eisenmantels	$\beta_e = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ 1/°C,
Quellung des Mauerwerks	$q = 50 \cdot 10^{-5}$,
Elastizitätsmodul des Mauerwerks	$E_m = 2{,}5 \cdot 10^{+5}$ kg/cm²,
Elastizitätsmodul des Eisens	$E_e = 21{,}5 \cdot 10^{+5}$ kg/cm²,
Querdehnzahl des Mauerwerks	$\nu_m = 0{,}25$,
Querdehnzahl des Eisens	$\nu_e = 0{,}30$,
Ausmauerungstemperatur	$t_A = 25$°C,
Wärmeübergangszahl	$\alpha = 12$ kcal/m²h°C.

Der Verlauf der Innentemperatur t_i ist in Abb. 17 für einen Anheiz- und Abkühlvorgang dargestellt. Bei der Berechnung der Temperaturen t_e und t_m, auf die hier nicht weiter eingegangen wird[1], soll der Verlauf von t_i durch zwei Geradenstücke ersetzt werden:

$$t_i = 25°\,\mathrm{C} + 125°\,\mathrm{C}\,(\tau/1{,}5\,\mathrm{h}) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq 1{,}5\,\mathrm{h}\,,$$
$$t_i = 150°\,\mathrm{C} \quad \text{für} \quad 1{,}5\,\mathrm{h} \leqq \tau$$

beim Anheizen und

$$t_i = 150°\,\mathrm{C} - 125°\,\mathrm{C}\,(\tau/1{,}5\,\mathrm{h}) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq 1{,}5\,\mathrm{h}\,,$$
$$t_i = 25°\,\mathrm{C} \quad \text{für} \quad 1{,}5\,\mathrm{h} \leqq \tau$$

beim Abkühlen. Hierbei wird die Zeit τ für das Abkühlen wieder von $\tau = 0$ an gerechnet.

Zunächst berechnet man aus (41) die günstigste Ausmauerungsdicke:

$$K_M = 1{,}167\,,$$

woraus $\delta_{mM} = 0{,}0875$ m folgt. Wir wählen den abgerundeten Wert

$$\delta_m = 0{,}090\ \mathrm{m}\,,$$

womit sich aus (39) die Eisenmanteldicke zu

$$\delta_e \geqq 0{,}021\ \mathrm{m}$$

ergibt. Dies ist der Kleinstwert von δ_e, damit im stationären Zustand Zugspannungen im Mauerwerk unterdrückt werden. Wir wählen für die folgende Rechnung

$$\delta_e = 0{,}025\ \mathrm{m}\,.$$

Damit kann man die Anheiz- und Abkühlkurve in das (t_e, t_m)-Diagramm Abb. 18 einzeichnen. Dabei wurden die in Abb. 17 eingezeichneten Werte von t_e und t_m benutzt, die sich aus der Berechnung des Temperaturfeldes in der Ausmauerung für $\delta_m = 0{,}090$ m und die übrigen angegebenen Stoffwerte ergeben.

Die obere Grenzgerade wird nach (26)

$$t_{eo} = 0{,}584\,t_m + 52°\,\mathrm{C}\,,$$

die rechte Grenzgerade nach (31)

$$t_{mo} = -\,0{,}830\,t_e + 196{,}6°\,\mathrm{C}\,.$$

Die Spannungsgeraden haben die Gleichung

$$t_e = 0{,}584\,t_m + 70{,}9°\,\mathrm{C} - 0{,}0993\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{kg/cm^2}}\,(\sigma_\varphi)_e\,.$$

Diese Geraden sind in das (t_e, t_m)-Diagramm Abb. 18, eingetragen. Wie man erkennt, besteht keine Ablösungsgefahr, da die Abkühlkurve unter der oberen Grenzgeraden verläuft. Die höchste Mantelbeanspruchung tritt etwa 1,2 h nach Beginn des Anheizens auf; sie beträgt etwa 750 kg/cm², bleibt also durchaus in erträglichen Grenzen.

Zugspannungen in den äußeren Mauerwerkschichten treten nicht auf, da Anheiz- und Abkühlkurve links von der rechten Grenzgeraden verlaufen. Da erzwungene Abkühlung vorliegt, können Zugspannungen in den inneren Mauerwerksschichten auftreten. Man muß daher die Grenzkurve t_{mi} für die Abkühlung nach (33) in das (t_e, t_m)-Diagramm einzeichnen. In Abb. 18 verläuft sie von S' über U nach A'. Etwa 1,5 h nach dem Beginn des Abkühlens schneidet die Grenzkurve t_{mi} die Abkühlkurve: für ein kurzes Stück des Abkühlvorgangs treten in den inneren Ausmauerungsschichten

[1] Vgl. hierzu Fußnote 1 von S. 335.

Zugspannungen auf. Wie man leicht an Hand von (23) abschätzt, sind diese Spannungen jedoch so gering (etwa 5 kg/cm²), daß keine Gefahr für die Ausmauerung bestehen dürfte. Außerdem ist hierbei für t_i der Verlauf angenommen, der sich aus den beiden Geradenstücken mit dem scharfen Knick bei $\tau = 1{,}5$ h zusammensetzt. Nimmt man jedoch den abgerundeten, in Abb. 17 gestrichelt eingezeichneten Verlauf an, so ergibt sich eine Grenzkurve t_{mi} für das Abkühlen, die nicht so weit nach links ausgreift, und die die Abkühlkurve überhaupt nicht berührt (vgl. die in Abb. 18 gestrichelt eingezeichnete Kurve).

Zeichnet man ferner die Grenzkurve t_{mi} für das Anheizen ein, die in Abb. 18 von A' über V nach S' verläuft, so kann man die bei $\tau = 1{,}5$ h auftretende maximale Temperaturdifferenz

$$(\Delta t_m)_{max} = t_{mi} - t_m = 423\,^\circ\mathrm{C}$$

abgreifen und die maximale Druckspannung im Mauerwerk nach (34) zu

$$[\sigma_z(r_i)]_m = -\,286\ \mathrm{kg/cm^2}$$

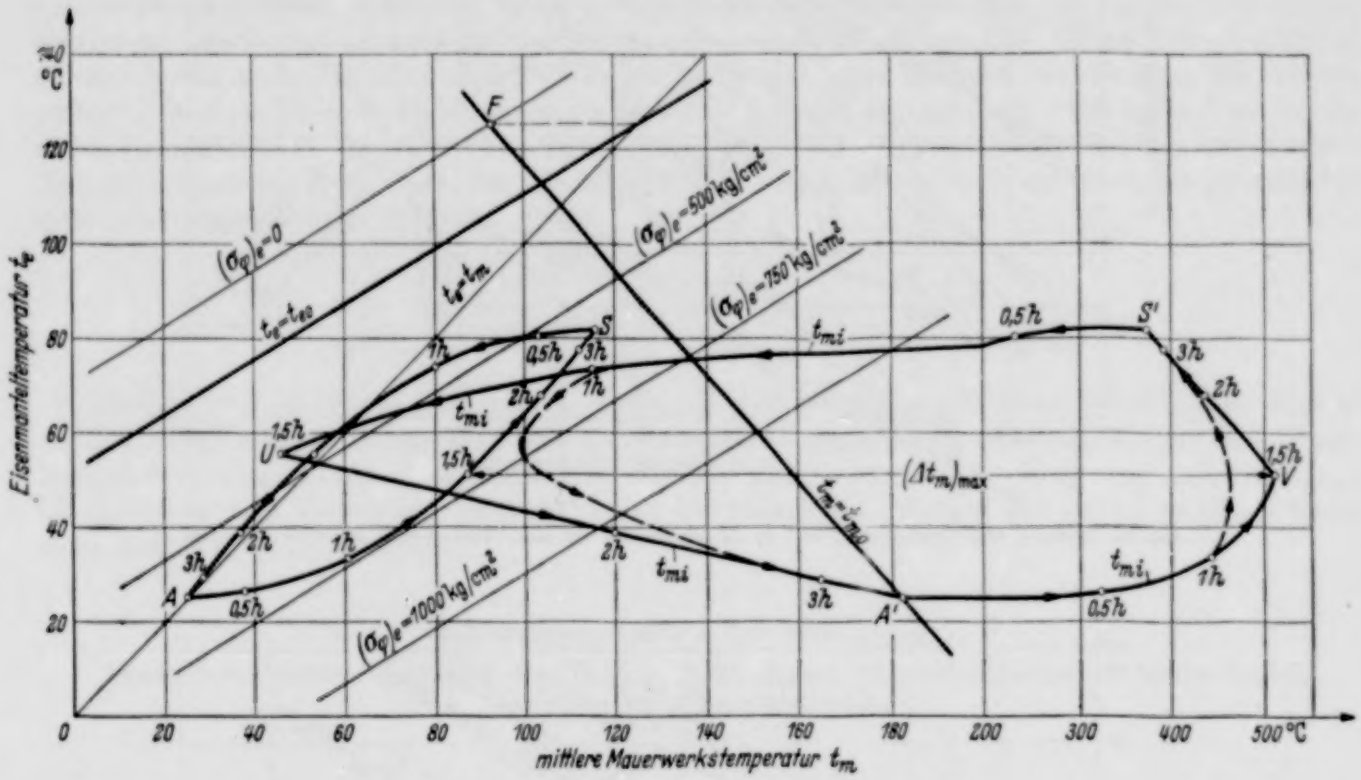

Abb. 18. (t_e, t_m)-Diagramm für das im Text behandelte Beispiel.

berechnen. Nimmt man dagegen auch für das Anheizen den in Abb. 17 gestrichelt gezeichneten Verlauf von t_i an, so erniedrigt sich $(\Delta t_m)_{max}$ auf 375° C, und man erhält

$$[\sigma_z(r_i)]_m = -\,254\ \mathrm{kg/cm^2}.$$

Wie das (t_e, t_m)-Diagramm und die Berechnungen zeigen, verhält sich der ausgemauerte Behälter unter den Betriebsbedingungen, für die er berechnet ist, zufriedenstellend. Hierbei ist allerdings vorausgesetzt, daß die Stoffwerte richtig angenommen sind. Es soll daher untersucht werden, in welchen Grenzen die Stoffwerte des Mauerwerks, q, β_m und E_m schwanken dürfen, ohne daß Gefahren bestehen.

c) Die Stoffwerte des Mauerwerks werden verändert. Bei einer Änderung der Kittquellung q verschieben sich die Spannungsgeraden nach (27) und die rechte Grenzgerade nach (31) unter Beibehaltung ihrer Steigung. Die Spannungsgeraden behalten außerdem ihren Abstand unverändert bei und rücken mit wachsendem q zu höheren Werten von t_e, während die rechte Grenzgerade sich zu höheren Temperaturen t_m verlagert: es wächst also die Mantelbeanspruchung, während sich die Gefahr, daß Zugspannungen im Mauerwerk auftreten, verringert.

Für das soeben behandelte Beispiel ergeben sich dabei folgende Grenzen, in denen q schwanken darf, ohne daß Schäden auftreten: Bei $q_{min} = 46 \cdot 10^{-5}$ läuft die rechte Grenzgerade durch den stationären Punkt S in Abb. 18, während q auf $80 \cdot 10^{-5}$ erhöht werden könnte, ohne daß die maximale Mantelbeanspruchung 1000 kg/cm² überschreitet. Dies gilt, wenn alle Abmessungen und die übrigen Stoffwerte konstant gehalten werden.

Variiert man dagegen unter Konstanthalten der übrigen Daten die Wärmedehnzahl β_m des Mauerwerks, so drehen sich die Spannungsgeraden um jene Punkte, in denen sie die Senkrechte $t_m = t_A$ schneiden. Die rechte Grenzgerade dreht sich um einen Fixpunkt D mit den Koordinaten

$$t_e = t_A + \frac{q}{\beta_e} - \frac{p_i r_0}{\beta_e E_e' \delta_e}, \qquad t_m = t_A + \left(\frac{q}{\beta_e} - \frac{p_i r_0}{\beta_e E_e' \delta_e}\right)\left(1 + \frac{E_e' \delta_e}{E_m' \delta_m}\right).$$

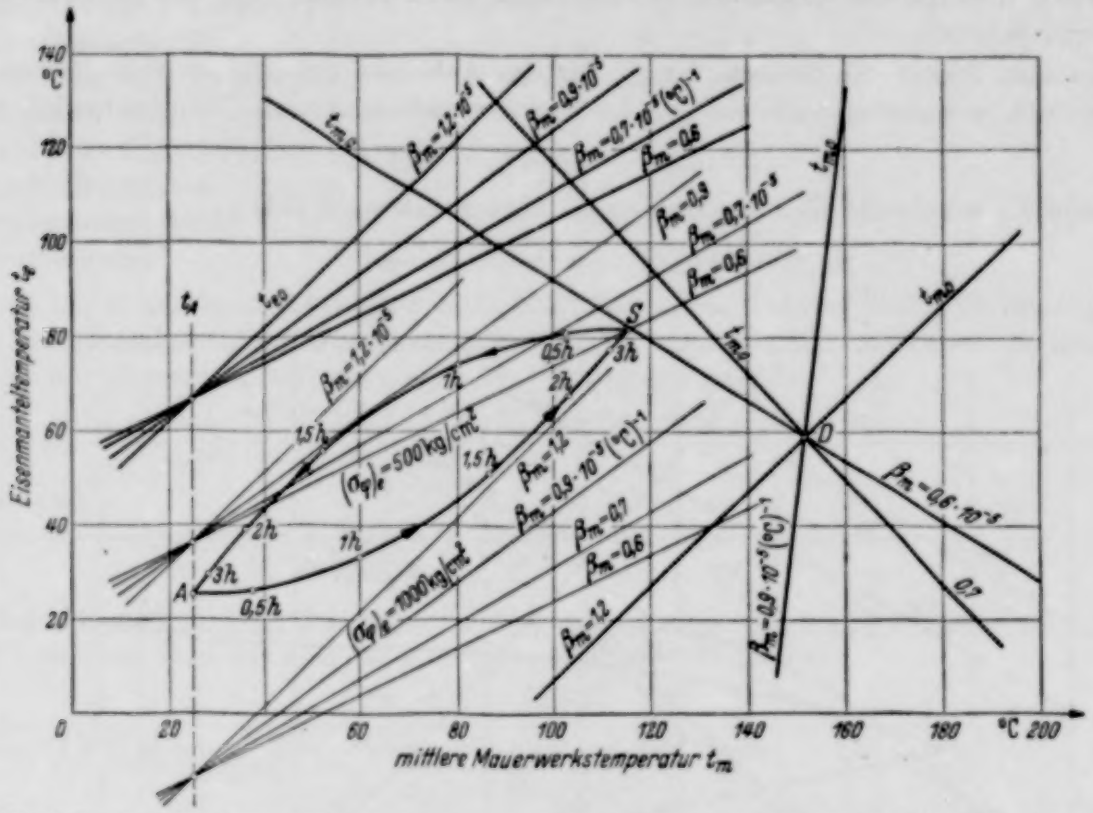

Abb. 19. Drehung der Grenzgeraden und Spannungsgeraden bei einer Veränderung der Wärmedehnzahl β_m.

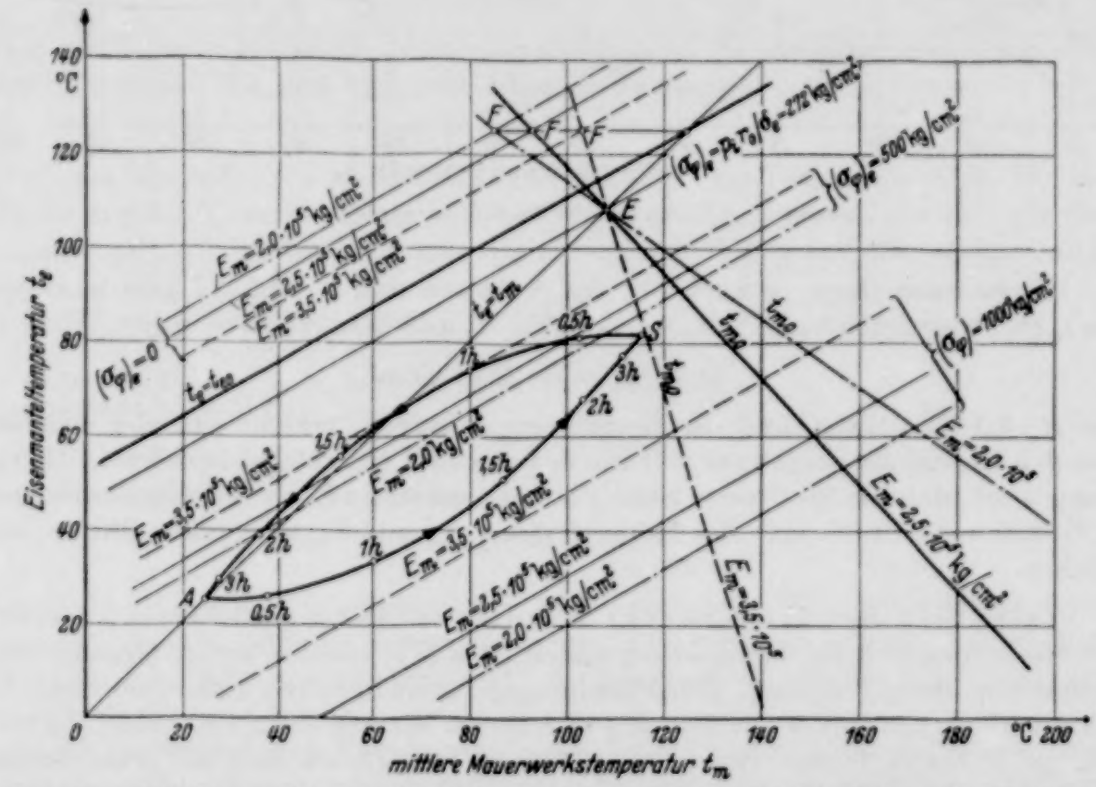

Abb. 20. Drehung der rechten Grenzgeraden und Verschiebung der Spannungsgeraden bei einer Änderung des Elastizitätsmoduls E_m.

Abb. 19 zeigt, wie sich die obere Grenzgerade, die rechte Grenzgerade und die Spannungsgeraden $(\sigma_\varphi)_e = 500$ kg/cm² und $(\sigma_\varphi)_e = 1000$ kg/cm² bei einer Veränderung von β_m verhalten. Mit größer werdendem β_m wächst die Mantelbeanspruchung, bei kleiner werdendem β_m besteht die Gefahr, daß Zugspannungen im Mauerwerk auftreten. Wie man aus Abb. 19 erkennt, darf β_m nicht unter

$0{,}6 \cdot 10^{-5}\,(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ sinken, sollen Zugspannungen im Mauerwerk unterdrückt werden. Dagegen würde erst bei $\beta_m > 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ die Mantelbeanspruchung 1000 kg/cm² erreichen. Bei wachsendem β_m steigt außerdem nach (34) die maximale Druckspannung im Mauerwerk.

Wird schließlich E_m geändert, während die übrigen Größen konstant bleiben, so verschieben sich die Spannungsgeraden unter Beibehaltung ihrer Richtung, aber unter Änderung ihres gegenseitigen Abstandes. Wie Gleichung (27) lehrt, wächst der Abstand mit kleiner werdendem E_m. Nur eine Spannungsgerade bleibt unverändert; sie entspricht der Spannnng

$$(\sigma_\varphi)_e = \frac{p_i\, r_0}{\delta_e}.$$

Die rechte Grenzgerade dreht sich um den Fixpunkt E, der auf der Geraden $t_e = t_m$ liegt und durch den außerdem die eben genannte Spannungsgerade hindurchgeht. Mit wachsendem E_m dreht sich die rechte Grenzgerade im Sinne des Uhrzeigers. Für $E_m' \to \infty$ fällt sie mit der Geraden $t_e = t_m$ zusammen, für $E_m' = 0$ verläuft sie horizontal.

Hieraus ergibt sich eindeutig, daß ein möglichst kleiner Elastizitätsmodul E_m von Vorteil ist: die Gefahr, daß Zugspannungen im Mauerwerk auftreten, wird geringer, die Mantelbeanspruchung nimmt ab und nach (34) sinkt auch die höchste Druckspannung, die beim Anheizen im Mauerwerk auftritt. In Abb. 20 sind die Spannungsgeraden $(\sigma_\varphi)_e = 500$ kg/cm² und 1000 kg/cm² sowie die rechte Grenzgerade für drei Werte von E_m eingezeichnet, wobei sonst die Daten des hier behandelten Beispiels zugrunde gelegt sind. Für die maximale Druckspannung im Mauerwerk erhält man folgende zusammengehörige Werte:

E_m	$2{,}0 \cdot 10^5$	$2{,}5 \cdot 10^5$	$3{,}5 \cdot 10^5$	kg/cm²
$[\sigma_z(r_i)]_m$	— 240	— 286	— 380	kg/cm²

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß auch Änderungen der Wärmeleitzahl λ_m des Mauerwerks und der meist nur ungenau bekannten Wärmeübergangszahl α zwischen Mantel und Umgebung den Spannungszustand im Behälter in starkem Maße beeinflussen. Dies zeigt sich im (t_e, t_m)-Diagramm in einer Verzerrung der Anheiz- und Abkühlkurven. Hierauf soll jedoch an dieser Stelle nicht mehr eingegangen werden.

(Eingegangen am 22. November 1956.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr.-Ing. *H. D. Baehr*, Technische Hochschule Karlsruhe/Bd. Lehrstuhl für Thermodynamik.

Zur Theorie schiefwinkliger Trägerroste

Von S. Woinowsky-Krieger

1. Einleitung. Handelt es sich um einen allseitig abgestützten Trägerrost von rechteckiger Begrenzung, so kann man die Träger entweder seitenparallel nach Abb. 1a, oder auch diagonal, nach Abb. 1b verlegen. In wirtschaftlicher Hinsicht sind diese beiden Anordnungen einander etwa gleichwertig[1]. Von den Architekten werden die sich diagonal kreuzenden Rippen öfters bevorzugt; auch bieten die Diagonalträger den kürzesten Weg zur Überleitung der Kräfte von den Ecken in das Tragwerk falls dieses letztere (wie es bei gelenkiger Stützung oft der Fall ist) Eckverankerungen benötigt; bei dreieckigen Grundrissen (Abb. 12) ist hingegen die seitenparallele, aus drei Trägerscharen bestehende Anordnung wohl die einzig übliche. Die beiden vorerwähnten schiefwinkligen Systeme können natürlich auch bei krummlinig begrenzten Grundrissen Verwendung finden (Abb. 6 und 10). Will man die Berechnung des statisch unbestimmten Traggerippes nach der klassischen Methode erledigen, so wird man Transversalkräfte und Kräftepaare, die die gegenseitige Einwirkung zweier Träger in ihrem Kreuzungspunkt darstellen als Überzählige einführen und zwar unter weitestgehender Ausnützung der etwa vorhandenen Symmetrie des Trägersystems. Bei einer größeren Anzahl von Kreuzungspunkten erweist sich dieses Verfahren als wenig praktisch; anderseits nähert sich dann das elastische Verhalten des Trägerrostes immer mehr dem Verhalten einer elastischen anisotropen Platte. Rechtwinklige Trägerroste, speziell die zweiseitig aufliegenden Tragwerke von Brücken sind bereits mit Erfolg nach der Theorie der orthotropen Platte berechnet worden; auch stimmen die Ergebnisse solcher Berechnungen gut mit den Versuchsergebnissen überein[2].

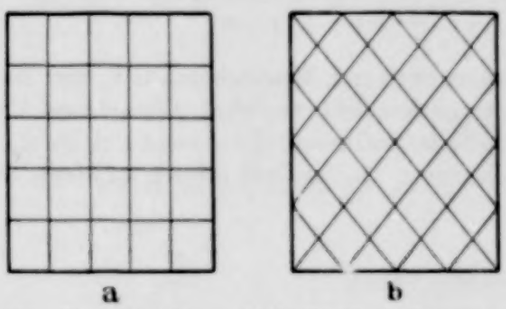

Abb. 1. Seitenparalleler und schiefwinkliger Trägerrost.

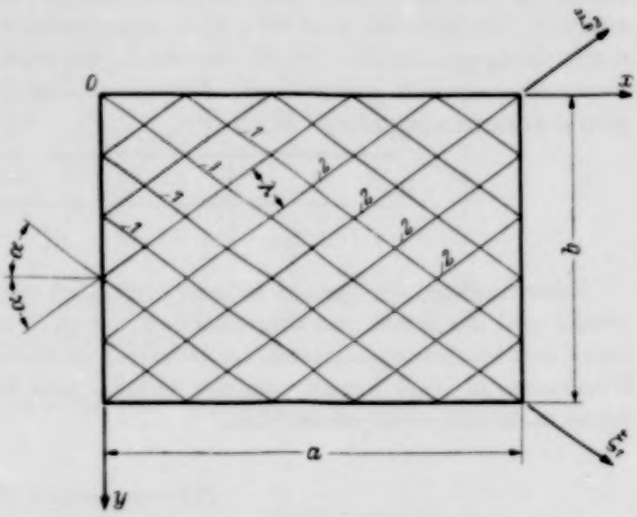

Abb. 2. Schiefwinkliger Trägerrost im Koordinatensystem.

Der hier dargelegten Anwendung der Theorie anisotroper Platten auf die Berechnung schiefwinkliger Trägerroste seien die folgenden grundlegenden Annahmen vorausgeschickt:

1. Die Trägerabstände sind klein genug um in bezug auf das elastische Verhalten des Systems den Ersatz des Trägerrostes durch eine Platte zu rechtfertigen.

2. Die Träger sind nicht nur biegesteif, sondern auch torsionssteif; die in den Kreuzungspunkten vorhandenen Anschlüsse sind imstande, die hieraus entspringenden Kräftepaare und transversalen Kräfte zu übertragen. Der Einfluß der Nachgiebigkeit solcher Verbindungen auf die Steifigkeit des Trägerrostes wird außer Acht gelassen.

3. Träger aller Richtungen haben die gleichen gegenseitigen Abstände und ihre Querschnitte besitzen die gleiche und der Trägerlänge nach konstante Steifigkeit.

2. Differentialgleichung der Biegung eines schiefwinkligen Trägerrostes von doppelter Symmetrie. Wir betrachten die Gleichgewichtsbedingungen eines aus einem Trägerrost (Abb. 2) herausgeschnittenen Kreuzungspunktes (Abb. 3), der auf die rechtwinkligen Koordinaten x, y und zugleich auf die schiefwinkligen Koordinaten ξ_1, ξ_2 bezogen sei. Es bezeichne M_1 das Biegemoment, T_1 das

[1] Einen diesbezüglichen Vergleich findet man bei *K. Beyer*, Die Statik im Stahlbetonbau, S. 625, Berlin 1948.

[2] Siehe z. B. *K. Sattler*, Bauingenieur, 30 (1955) S. 77.

Torsionsmoment und Q_1 die zur Tragwerkebene transversale Scherkraft des Trägerzuges 1, M_2, T_2 und Q_2 seien die betreffenden Schnittkräfte des Trägerzuges 2. Sei ferner B die Biegesteifigkeit und C die Torsionssteifigkeit eines Trägers, λ der gegenseitige Trägerabstand und q die Intensität der Querbelastung je Flächeneinheit, wonach sich die transversale Knotenlast zu $q\lambda$ ergibt. Die Querkraftdifferenzen $\partial Q_1/\partial \xi$, und $\partial Q_2/\partial \xi_2$ gelten dabei in der Richtung von q als positiv.

Läßt man die Schnittkräfte an den beiden Trägerstücken (deren Länge zur Vereinfachung der Schreibweise gleich eins gesetzt ist) angreifen, so erhält man das in Abb. 3 dargestellte System von Kräften und Momenten. Projiziert man die Momenten-Vektoren auf die Achsen ξ_1 und ξ_2, so gelangt man zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M_2}{\partial \xi_2}\sin 2\alpha + \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial T_2}{\partial \xi_2}\cos 2\alpha &= Q_2 \sin 2\alpha\,, \\ \frac{\partial M_1}{\partial \xi_1}\sin 2\alpha - \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}\cos 2\alpha - \frac{\partial T_2}{\partial \xi_2} &= Q_1 \sin 2\alpha\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

während die Gleichgewichtsbedingung für die transversalen Kräfte die Relation

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_2} + q\lambda = 0 \tag{2}$$

liefert.

Führt man neben ξ_1, ξ_2 noch die Hilfskoordinaten η_1, η_2 nach Abb. 3 ein, so drücken sich die Biege- und Torsionsmomente der beiden Trägerzüge in folgender Weise durch die Transversalverschiebung w des Knotenpunktes aus:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -B\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2}\,, \\ M_2 &= -B\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2}\,, \\ T_1 &= C\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1\,\partial \eta_1}\,, \\ T_2 &= C\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2\,\partial \eta_2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

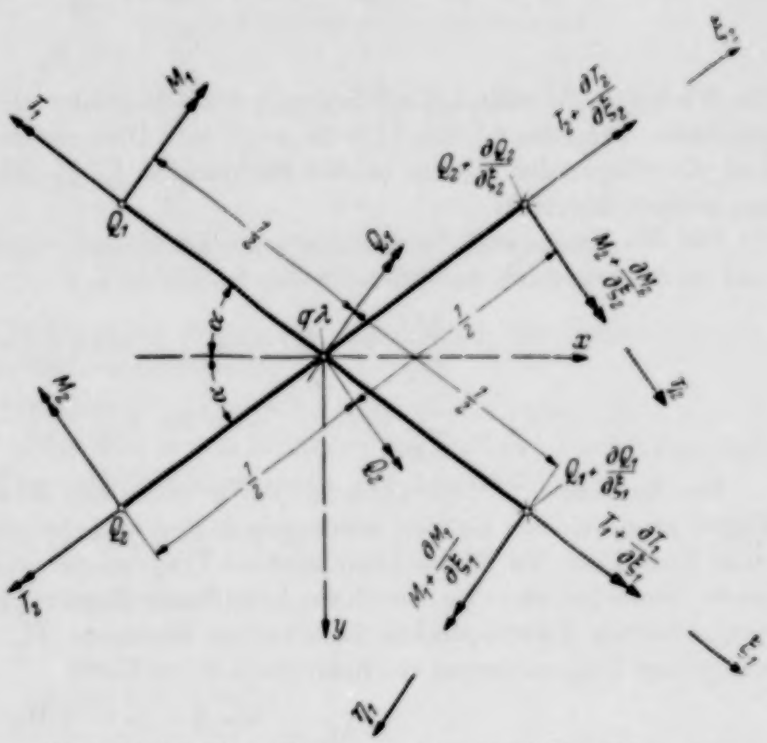

Abb. 3. Schnittkräfte am Knotenpunkt eines schiefwinkligen Trägerrostes.

Mit diesen Ausdrücken gehen wir in die Gleichungen (1) ein und eliminieren alsdann die Querkräfte mit Hilfe der Beziehung (2). Es resultiert daraus die Differentialgleichung

$$B\left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_2^4}\right) + \frac{C}{\sin 2\alpha}\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1\,\partial \xi_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2\,\partial \eta_2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1\,\partial \eta_1}\right) + \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi_1^3\,\partial \eta_1} - \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_2^3\,\partial \eta_2}\right)\cos 2\alpha\right] = q\lambda\,. \tag{4}$$

Die Randbedingungen des Trägerrostes lassen sich am einfachsten formulieren, wenn man von den Koordinaten x, y Gebrauch macht. Mit Rücksicht auf

$$\left.\begin{aligned} x &= (\xi_1 + \xi_2)\cos\alpha = (-\eta_1 + \eta_2)\sin\alpha, \\ y &= (\xi_1 - \xi_2)\sin\alpha = (\eta_1 + \eta_2)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

hat man

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2}\end{matrix}\right\} &= \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} \pm \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\,, \\ \left.\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_2}\end{matrix}\right\} &= \mp\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Hiermit geht die Gleichung (4) in die Gleichung

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \tag{7}$$

über. Dies ist die Differentialgleichung einer orthotropen Platte mit den folgenden Werten ihrer drei Steifigkeiten

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \frac{2B}{\lambda}\cos^4\alpha + \frac{C}{2\lambda}\sin^2 2\alpha\,, \\ D_y &= \frac{2B}{\lambda}\sin^4\alpha + \frac{C}{2\lambda}\sin^2 2\alpha\,, \\ H &= \frac{3B}{2\lambda}\sin^2 2\alpha + \frac{C}{2\lambda}(3\cos^2 2\alpha - 1)\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Zur Integration der Differentialgleichung (7), speziell im Falle einer rechteckigen Begrenzung des Tragwerkes, ist hier zu bemerken, daß der für die Form der Lösung wesentliche „Torsionssteifigkeitsfaktor“

$$\mu = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}} \tag{9}$$

für Winkel α, die nahe bei $\pi/4$ liegen, erheblich größer als eins ausfällt, während für den seitenparallelen Trägerrost (Abb. 1) stets $\mu < 1$ ist. Dies entspricht der Tatsache, daß die Biegesteifigkeit des diagonalen Rostes in den Richtungen ξ_1, ξ_2 (Abb. 2) diejenige in den Richtungen x, y bei weitem übertrifft.

Für die Biege- und Torsionsmomente der Träger ergeben sich auf Grund der Gleichungen (3) und (6) die folgenden Ausdrücke in den Variablen x, y:

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix}\right\} &= -B\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} \pm \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 w\,, \\ \left.\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix}\right\} &= C\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos 2\alpha \pm \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Ausdrücke (10) die zunächst nur gewisse, den Momenten der stellvertretenden orthotropen Platte proportionale Größen wiedergeben, bedürfen bei einem nicht sehr dichten Trägernetz noch einer Korrektur. In Wirklichkeit wird ein Trägermoment, etwa das Biegemoment M_1 des Trägers 1 an der Stelle (m) nicht nur durch das betreffende Moment M_m, sondern auch durch die für die beiden benachbarten Knotenpunkte berechneten Momente M_{m-1} und M_{m+1} beeinflußt (Abb. 4). Das endgültige Trägermoment erscheint dann in der Form

$$\overline{M}_m = \frac{M_{m-1} + (n-2)M_m + M_{m+1}}{n}\,, \tag{11}$$

wobei die Zahl n noch einer näheren Festlegung bedarf.

Macht man beispielsweise die plausible Annahme daß dem Träger (m) in Richtung ξ, die schraffierte Momentenfigur zufällt und setzt noch einen parabolischen Verlauf der Momentenkurve zwischen $(m-1)$ und (m) voraus, so erhält man $n = 24$.

Zwei Sonderfälle müssen hervorgehoben werden. Für einen rechtwinkligen diagonalen Trägerrost, d. h. mit $\alpha = \pi/4$ ergeben sich die Steifigkeiten zu

$$\left.\begin{aligned} D_x = D_y &= \frac{B+C}{2\lambda}\,, \\ H &= \frac{3B-C}{2\lambda}\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Man kommt natürlich zum selben Ergebnis wenn man in der wohlbekannten Differentialgleichung für den rechtwinkligen Trägerrost von den Variablen ξ_1, ξ_2 (Abb. 2, $\alpha = \pi/4$) zu den Variablen x, y übergeht.

In einem anderen, technisch allerdings wenig interessanten Fall $\alpha = 0$ geht die allgemeine Differentialgleichung (7) in die Gleichung

$$2B\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2C\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = q\lambda \tag{13}$$

über. Ist nun w eine Funktion von x allein, so wird die vorstehende Gleichung identisch mit derjenigen eines Doppelbalkens von der Biegesteifigkeit $2B$.

Die mechanische Bedeutung des zweiten Gliedes in (13) möge am Beispiel der elastischen Fläche

$$w = \frac{q\lambda}{8C} x^2 y^2 , \tag{14}$$

die der Gleichung (13) genügt, interpretiert werden. Die zu den Durchbiegungen (14) gehörige Zunahme des Torsionsmomentes längs eines Doppelträgers, also die Größe

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2C \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = q\lambda y \tag{15}$$

läßt sich durch Kräftepaare $(q\,y)\cdot\lambda$ nach Abb. 5 ersetzen. Im nächsten Trägerfeld vergrößert sich das Kräftepaar auf $q(\gamma+\lambda)\cdot\lambda$ wodurch sich eine resultierende Belastung $-q\lambda$ je Doppelbalken ergibt, die der äußeren Belastung $q\lambda$ das Gleichgewicht hält.

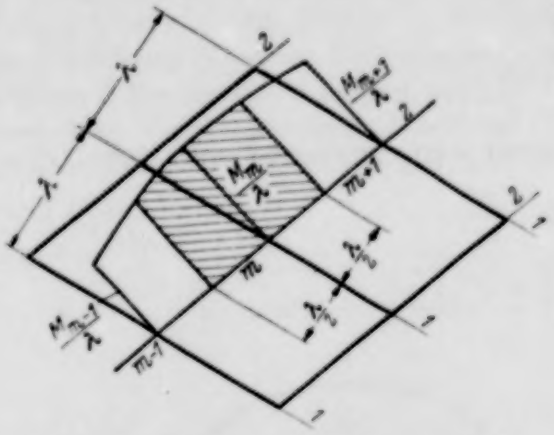

Abb. 4. Zur Berechnung der Biegemomente eines Trägerzuges.

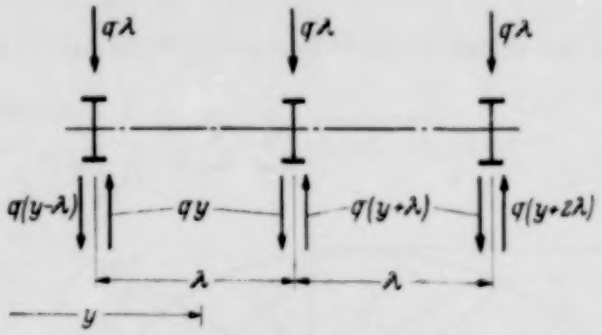

Abb. 5. Sonderfall der Belastung eines Trägerrostes mit $\alpha = 0$.

3. Anwendungsbeispiele. Drei einfache Beispiele mögen die Anwendung der Differentialgleichung (7) auf die Lösung von Trägerrostproblemen illustrieren.

a) Freigestützter Parallelstreifen unter gleichförmiger Belastung. Sind $x = 0$, $x = a$ die Begrenzungsgeraden des Streifens, so wird w eine Funktion von x allein. Die Differentialgleichung (7) erhält somit die Form $d^4w/d^4x = q/D_x$ bei konstantem q und ihre Lösung ist

$$w = \frac{q}{24\,D_x}(x^4 - 2\,a\,x^3 + a^3\,x) . \tag{16}$$

Die Biege- und Torsionsmomente der Träger ergeben sich somit zu

$$\left.\begin{aligned} M_1 = M_2 &= \frac{M_0}{2\left(\cos^2\alpha + \frac{C}{B}\sin^2\alpha\right)}, \\ -T_1 = T_2 &= \frac{2\,M_0}{\frac{B}{C}\operatorname{cotg}^2\alpha + \sin 2\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

mit $M_0 = q\lambda\,x\,(a-x)/2$.

b) Der elliptisch begrenzte Trägerrost mit Randeinspannung (Abb. 6). Aus den Gleichungen (6) geht hervor, daß die Bedingung der Endeinspannung der Träger, nämlich $\partial w/\partial\xi_1 = \partial w/\partial\xi_2 = 0$ der Randbedingung $\partial w/\partial x = \partial w/\partial y = 0$ äquivalent ist. Bei gleichförmiger Belastung des Trägerrostes durch q lassen sich sowohl die Differentialgleichung (7) als auch die obigen Randbedingungen befriedigen durch den Ausdruck [1]

$$w = \frac{q\,a^2\,b^2}{64\,D}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \tag{18}$$

mit

$$D = \frac{1}{8}\left(3\frac{b^2}{a^2}D_x + 2H + 3\frac{a^2}{b^2}D_y\right). \tag{19}$$

Die Biege- und Torsionsmomente des Trägerrostes lassen sich nach den Gleichungen (10) sofort berechnen. Im Sonderfall des kreisförmig begrenzten Rostes ($a = b$) ergeben sich in der Kreismitte die Momente

$$M_1 = M_2 = \frac{q\,a^2}{16}\frac{B}{D}, \qquad T_1 = T_2 = 0 , \tag{20}$$

[1] Bereits *S. G. Lechnickij* hat gezeigt, daß die wohlbekannte *Bryan*sche Lösung auch für anisotrope Platten gilt; siehe sein Buch: Anisotrope Platten, S. 203, Moskau 1947 (Russisch).

während die Momente längs der Randlinie (Abb. 7) durch

$$\left.\begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{q\,a^2}{8}\,\frac{B}{D}\cos^2(\vartheta \mp \alpha)\,, \qquad \left.\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix}\right\} = \frac{q\,a^2}{16}\,\frac{C}{D}\sin^2(\vartheta \mp \alpha) \tag{21}$$

gegeben sind.

c) Freigestützter Trägerrost mit rechteckiger Begrenzung (Abb. 2). Lagert der Trägerrost auf zwei gegenüberliegenden Seiten frei, sonst aber in beliebiger Weise auf, so läßt sich die Gleichung (7) nach der Methode von *M. Levy* integrieren, ist er ringsum gelenkig gestützt, so wird auch das *Navier*sche Verfahren angängig. Die weiteren Ausführungen seien auf diesen letzteren Fall beschränkt. Entwickelt man die Plattenbelastung in eine Doppelsumme von der Form

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\frac{m\,\pi\,x}{a}\sin\frac{n\,\pi\,y}{b} \tag{22}$$

und geht mit dieser in die Differentialgleichung (7) ein, so kommt man zur elastischen Fläche

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^4}\,\frac{a_{mn}\sin\dfrac{m\,\pi\,x}{a}\sin\dfrac{n\,\pi\,y}{b}}{D_x\left(\dfrac{m}{a}\right)^4 + 2\,H\left(\dfrac{m\,n}{a\,b}\right)^2 + D_y\left(\dfrac{n}{b}\right)^4}\,. \tag{23}$$

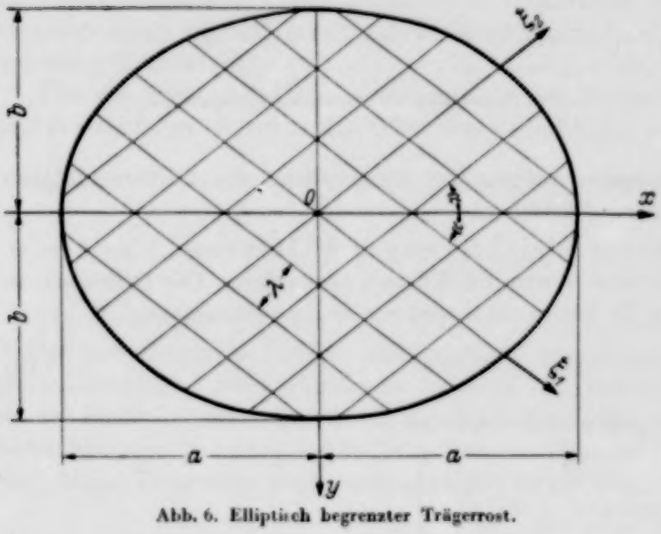

Abb. 6. Elliptisch begrenzter Trägerrost.

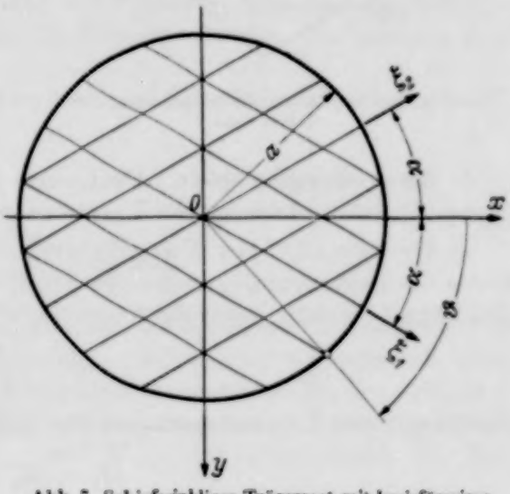

Abb. 7. Schiefwinkliger Trägerrost mit kreisförmiger Begrenzung.

Längs der vier Ränder des Rostes $x = 0$, a und $y = 0$, b verschwinden somit sowohl die Durchbiegungen w als auch die Krümmungen $\partial^2 w/\partial^2 x^2$ und $\partial^2 w/\partial y^2$. Die Biege- und Torsionsmomente an den Trägerenden ergeben sich nun nach den Gleichungen (10) zu

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -B\sin 2\alpha\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,, \\ M_2 &= B\sin 2\alpha\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,, \\ T_1 &= T_2 = C\cos 2\alpha\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Das Ergebnis (24) läßt erkennen, daß die Enden der Trägerzüge, falls einzeln genommen, nicht frei von Biegemomenten sind. Fällt aber der äußerste Kreuzungspunkt des Rostes mit der Randlinie zusammen (Abb. 8), so wird das aus beiden Trägern resultierende, um die Randlinie $x = 0$ drehende Moment offenbar null. Das um die Randnormale drehende Moment wird hingegen nicht null sondern gleich

$$M_t = 2\,M_2\sin\alpha + 2\,T_1\cos\alpha = 2\,(B\sin 2\alpha\sin\alpha + C\cos 2\alpha\cos\alpha)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=0}\,, \tag{25}$$

und ähnliches gilt für die anderen Ränder. Zur einwandfreien Übertragung der Kräftepaare M_t auf die Auflage erscheint die Anordnung eines Randbalkens als zweckmäßig. Um eine Einspannung des Trägerrostes längs der Randlinie zu verhindern, müßte dieser Randträger kippfrei gelagert werden. Mit ähnlichen Schwierigkeiten hat man freilich auch bei Platten zu tun falls ihre gelenkige Randstützung einwandfrei arbeiten soll.

Wollte man auch die Randmomente M_t zum Verschwinden bringen, so müßte man die Schubdeformation der stellvertretenden anisotropen Platte mit in Rechnung stellen[1]. Hierdurch käme man in die Lage, noch diese dritte Randbedingung zu erfüllen, allerdings auf Kosten der Einfachheit der Lösung. Die Abänderung der Randbedingungen und die Mitberücksichtigung der Schubdeformation dürfte besonders die Momente des Trägerrostes im Bereiche seiner Ecken beeinflussen.

Nach Hinzufügung weiterer Glieder läßt sich die Differentialgleichung (7) der Trägerbiegung auch zur Lösung mancher anderer Probleme heranziehen. Sind beispielsweise alle Träger des Rostes einem gleichen Achsialdruck P ausgesetzt, so kommt dies einer zusätzlichen Querbelastung der Träger 1 und 2 (Abb. 2) mit $-P\,\partial^2 w/\partial\xi_1^2$ bzw. $-P\,\partial^2 w/\partial\xi_2^2$ gleich. Nun entspricht der rechte Teil der Gleichung (7) einer Belastung von der Größe $q\lambda/2$ je Einheit der Trägerlänge. Um den Druckkräften P Rechnung zu tragen, müßte man also das zusätzliche Glied im rechten Teil jener Gleichung gleich

$$-\frac{2P}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\xi_2^2}\right) = -\frac{4P}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right)$$

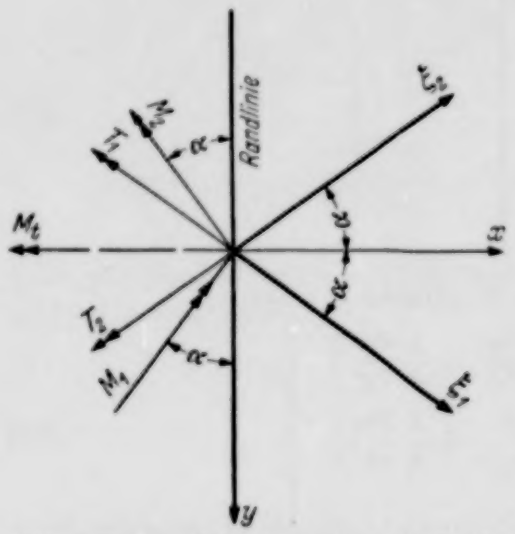

Abb. 8. Biege- und Torsionsmomente am Rande eines schiefwinkligen Trägerrostes.

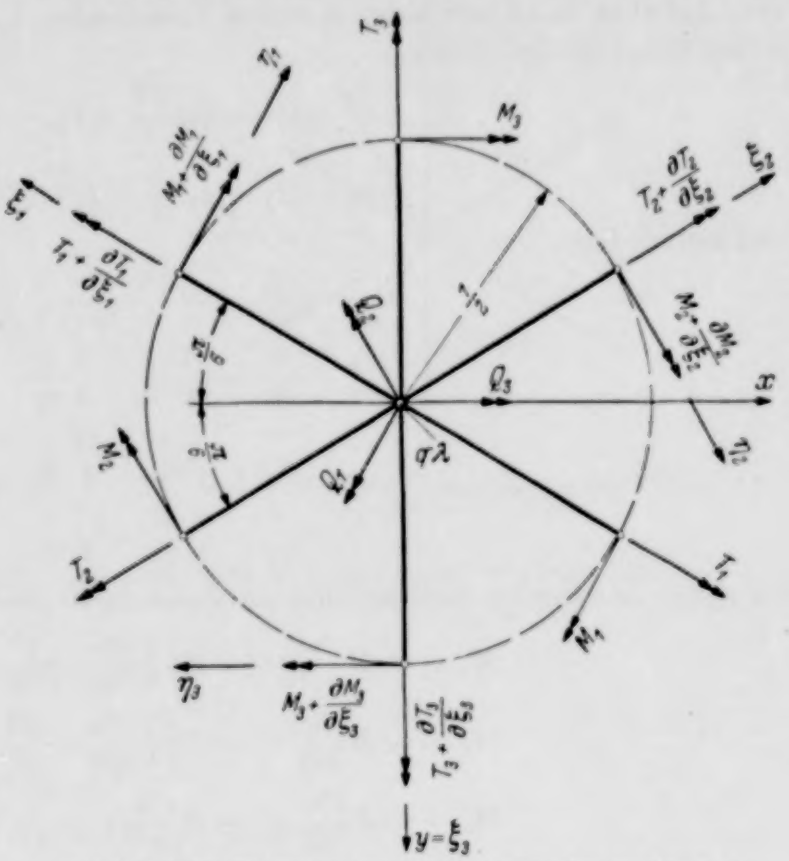

Abb. 9. Schnittkräfte am Knotenpunkt eines hexagonalen Trägerrostes.

setzen. Insbesondere mit $q = 0$ erhält man dann die Differentialgleichung der Knickung des Trägerrostes (Abb. 2) durch lauter gleiche Achsialdrücke P.

Die Differentialgleichung der freien Schwingungen des Trägerrostes ergibt sich ebenfalls aus der Gleichung (7), wo lediglich das Glied q durch das Glied

$$-\frac{2\gamma}{\lambda}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

zu ersetzen wäre, worin γ die Masse eines Trägers je Längeneinheit und t die Zeit sein soll.

4. Differentialgleichung der Biegung eines regelmäßig hexagonalen Trägerrostes. Mit Bezugnahme auf die Abb. 9 und 10 seien M_i, T_i und Q_i das Biege-, das Torsionsmoment und die transversale Scherkraft des zur Achse ξ_i $(i = 1, 2, 3)$ parallelen Trägerzuges, B die für alle Träger gleiche Biegsteifigkeit und C ihre Torsionssteifigkeit[2]; λ bezeichne wieder die gegenseitige Trägerentfernung und q die Lastintensität. Die Projektion sämtlicher Momentenvektoren auf die Richtung ξ_1 liefert die erste der folgenden Differentialgleichungen, während sich zwei weitere (nicht voneinander un-

[1] Wegen der Anwendung der Theorie von *E. Reissner* auf die Rechteckplatte (ohne Berücksichtigung der Anisotropie) siehe insbesondere *M. Schäfer*, Z. angew. Math. Mech. 32 (1952) S. 161.

[2] Die Kräfte Q_i sind in Abb. 9 weggelassen und nur die aus den Q_i resultierenden Kräftepaare eingetragen.

abhängige) Gleichungen durch zyklische Vertauschung der Indices ergeben. Man hat nun

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial T_3}{\partial \xi_3}\right) - \left(\frac{\partial M_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial M_3}{\partial \xi_3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = (Q_3 - Q_2)\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\\
&\frac{\partial T_2}{\partial \xi_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T_3}{\partial \xi_3} + \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}\right) - \left(\frac{\partial M_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial M_1}{\partial \xi_1}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = (Q_1 - Q_3)\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\\
&\frac{\partial T_3}{\partial \xi_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial T_2}{\partial \xi_2}\right) - \left(\frac{\partial M_1}{\partial \xi_1} - \frac{\partial M_2}{\partial \xi_2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = (Q_2 - Q_1)\frac{\sqrt{3}}{2}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Das Gleichgewicht der transversalen Kräfte drückt sich anderseits durch die Gleichung

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_3} + q\lambda = 0 \tag{27}$$

aus. Zwischen den Koordinaten x, y, den Koordinaten ξ_1, ξ_2 und den Hilfskoordinaten η_1, η_2 bestehen ferner die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
x &= -(\xi_1 - \xi_2)\frac{\sqrt{3}}{2} = (\eta_1 + \eta_2)\frac{1}{2}\,,\\
y &= -(\xi_1 + \xi_2)\frac{1}{2} = (-\eta_1 + \eta_2)\frac{\sqrt{3}}{2}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

und hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_1} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\,,\\
\frac{\partial}{\partial \xi_2} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\,,\\
\frac{\partial}{\partial \eta_1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\,,\\
\frac{\partial}{\partial \eta_2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Die Biege- und Torsionsmomente sind nun durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= -B\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} = -B\left(\frac{3}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
M_2 &= -B\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} = -B\left(\frac{3}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
M_3 &= -B\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_3^2} = -B\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,;
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}
T_1 &= C\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1\,\partial \eta_1} = C\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
T_2 &= C\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2\,\partial \eta_2} = C\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
T_3 &= C\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_3\,\partial \eta_3} = -C\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Schreibt man nun die Gleichungen (26), (27) unter Einführung der Variablen x, y um und eliminiert alsdann die Querkräfte, so lautet das Ergebnis

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(M_1 + M_2) + \sqrt{3}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(M_1 - M_2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(M_1 + M_2) + 2\frac{\partial^2 M_3}{\partial y^2}$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T_1 - T_2) - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(T_1 + T_2) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(T_1 - T_2) + \frac{\partial^2 T_3}{\partial x\,\partial y} + 2q\lambda = 0\,. \tag{32}$$

Durch Substitution der Momentenausdrücke (30), (31) in diese Gleichung erhält man die Differentialgleichung der Biegung des Trägerrostes in der endgültigen Form

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D}\,, \tag{33}$$

worin $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ und

$$D = \frac{3}{8\lambda}(3B + C) \tag{34}$$

sein soll.

Daß der hexagonale Trägerrost sich im wesentlichen wie eine isotrope Platte verhält, hängt mit seinen Symmetrie-Eigenschaften zusammen. Ein elastischer Körper dessen Deformationsenergie gegenüber einer Drehung um $\pi/3$ um eine Achse (etwa die z-Achse) invariant bleibt und dabei durch fünf Elastizitätskonstanten charakterisiert ist, verhält sich in dieser Hinsicht wie ein transversal isotroper Körper[1]. Diese letztere Eigenschaft muß aber, nach allen Vereinfachungen der *Kirchhoff*schen Plattentheorie, auch der isotropen dünnen Platte zugeschrieben werden, womit sich die Analogie der beiden zugehörigen Differentialgleichungen zwanglos erklären läßt.

5. Anwendungsbeispiele. a) Der längs einer Kreislinie eingespannte Trägerrost (Abb. 10). Als Lösung läßt sich wiederum der Ausdruck (18) verwenden, wo diesmal $a = b$ sein

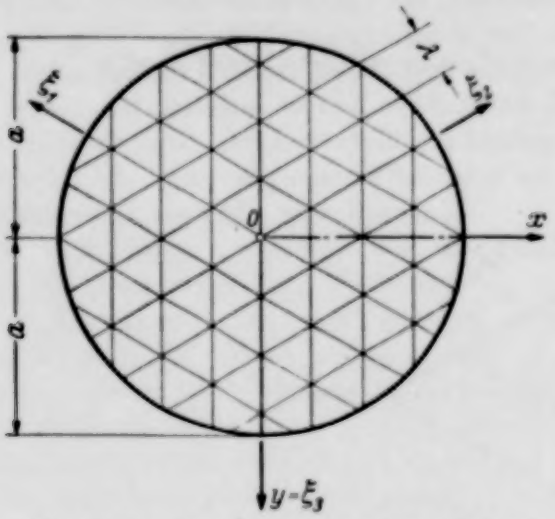

Abb. 10. Hexagonaler Trägerrost mit kreisförmiger Begrenzung.

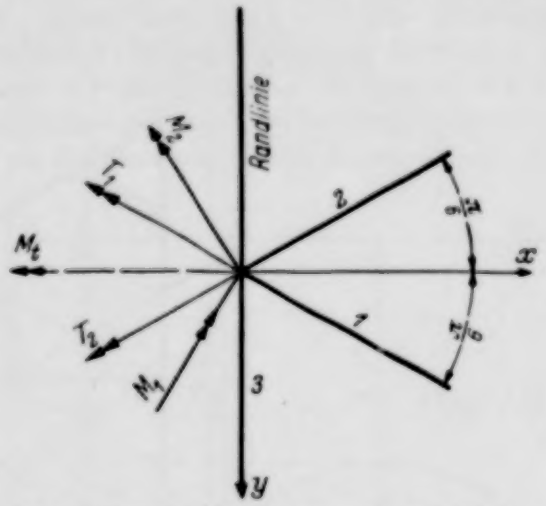

Abb. 11. Biege- und Torsionsmomente am Rande eines hexagonalen Trägerrostes.

muß, während D durch die Gleichung (34) gegeben ist. Die Ausdrücke (30), (31) liefern für die Kreismitte die Momente

$$M_1 = M_2 = M_3 = \frac{q\lambda a^2}{6\left(3 + \frac{C}{B}\right)},$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

während man am Rande, etwa für die Trägerschar 3 die Momente

$$M_3 = -\frac{q\lambda a^2}{6}\,\frac{1 - \cos 2\vartheta}{3 + \frac{C}{B}},$$

$$T_3 = -\frac{q\lambda a^2}{6}\,\frac{\sin 2\vartheta}{3\,\frac{B}{C} + 1}$$

erhält. Bei größeren Trägerabständen wäre auch hier und im Folgenden eine Korrektur der Momente nach Gleichung (11) vorzunehmen.

b) Der freigestützte rechteckige Trägerrost. In der *Navier*schen Lösung (22) ist diesmal

$$D_x = D_y = H = \frac{3}{8\lambda}(3\,B + C)$$

anzunehmen. Wir wollen wiederum den Rand $x = 0$ ins Auge fassen und die aus den Ausdrücken (23) resultierenden Endbedingungen der Träger daselbst betrachten (Abb. 11). Wegen $\partial^2 w/\partial x^2 = \partial^2 w/\partial y^2 = 0$ hat man

$$M_1 = -M_2 = -\frac{B\sqrt{3}}{2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \qquad M_3 = 0,$$

$$T_1 = T_2 = \frac{C}{2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \qquad T_3 = -C\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}.$$

[1] Siehe z. B. *A. E. H. Love*, Mathematical Theory of Elasticity, S. 100, 154, 160, Cambridge 1934.

Die aus den Schnittkräften der Träger 1 und 2 resultierenden Randmomente sind $M_n = 0$ (um die Randlinie drehend) und

$$M_t = (B + C)\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

(um die Randnormale drehend). Diese letzteren, in jedem Knotenpunkte des Randes wirkenden Kräftepaare rufen Biegemomente, Scherkräfte und zusätzliche Auflagerkräfte in dem ganzen Randträger hervor und ähnliches gilt für die übrigen Randträger des Trägerrostes.

c) Der freigestützte Trägerrost mit dreieckförmiger Begrenzung. Ist der Grundriß ein regelmäßiges Dreieck (Abb. 12) und q die als gleichförmig angenommene Belastung des Tragwerkes, so genügt bereits der Ausdruck

$$w = \frac{q\lambda}{24\,a\,(3\,B + C)}\left(x^3 - a\,x^2 - 3\,x\,y^2 - a\,y^2 + \frac{4}{27}\,a^3\right)\left(\frac{4}{9}\,a^2 - x^2 - y^2\right) \tag{35}$$

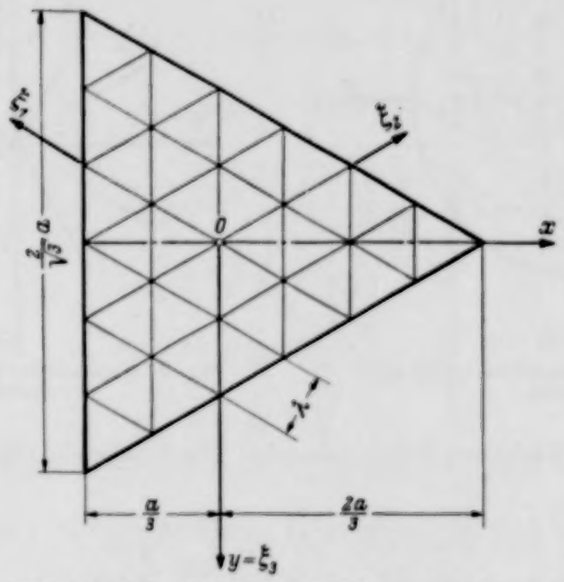

Abb. 12. Durch ein gleichseitiges Dreieck begrenzter Trägerrost.

um die Differentialgleichung (33) sowie die Bedingungen $w = 0$, $\partial^2 w/\partial x^2 = \partial^2 w/\partial y^2 = 0$ am Rande $x = -a/3$ und analoge Bedingungen längs der beiden anderen Ränder zu befriedigen. Hiernach ergeben sich die Biege- und Torsionsmomente in der Mitte des Tragwerkes zu

$$M_1 = M_2 = M_3 = \frac{4\,q\,\lambda\,a^2}{81\left(3 + \dfrac{C}{B}\right)},$$

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0\,.$$

Das resultierende Moment aus den Schnittkräften von vier Trägern, die in einem Rand-Knotenpunkt zusammenlaufen, ergibt wiederum den Wert Null für seine um die Randlinie drehende Komponente. Die um die Randnormale drehende Komponente ist längs der Randlinie $x = -a/3$ durch den Ausdruck

$$M_t = \frac{q\,\lambda\,(3\,y^3 - a^2\,y)\sqrt{3}}{12\,a}\,\frac{B + C}{3\,B + C}$$

gegeben. Die Kräftepaare M_t, die durch den Randträger auf Biegung aufzunehmen sind, verschwinden nicht nur in der Randmitte ($y = 0$) wegen Symmetrie, sondern auch in den Ecken $\left(y = \pm\, a/\sqrt{3}\right)$ des Trägerrostes.

(Eingegangen am 29. November 1956.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. S. *Woinowsky-Krieger*, Quebec, Que. (Canada) Université Laval, Faculté des Sciences, Boulevard de l'Entente

Die Auswölbungen der Kreis- und Kreisringmembranen unter hydrostatischem Druck

Erste Mitteilung: Homogener Spannungszustand

Von K. Karas

1. Einleitung. Für die im folgenden zu behandelnden Membranen lassen sich bemerkenswerterweise alle die Wölbflächen berührenden Fragen in geschlossener Form beantworten. Während der Rand der Kreismembran und der Außenrand der Kreisringmembran den praktischen Gegebenheiten entsprechend als fest vorausgesetzt wird, sollen beim Innenkreis der Kreisringmembran zunächst die beiden Grenzfälle der fest gelagerten Innenplatte sowie der vollkommen freien Innenplatte behandelt werden, denen schließlich der allgemeine Fall elastischer Lagerung der Innenplatte angefügt wird, der natürlich die beiden vorhergehenden praktisch sehr wichtigen Grenzfälle mit umschließt. Um möglichst allgemein zu bleiben, wird dabei elastische Lagerung der starren Innenkreisplatte sowohl gegen Verschieben als auch gegen Verdrehen vorausgesetzt. Die Volumina der Wölbungshügel sowie deren Höhenlinien werden durchweg berechnet, die letzteren auch für die Vollkreismembran sowie für die beiden erwähnten Grenzfälle der Kreisringmembran und auch im allgemeinen Fall elastisch gelagerter Innnenkreisplatte in vier Zahlenbeispielen numerisch ermittelt und in anschaulichen Schichtenplänen dargestellt. Der Spannungszustand wird zunächst in allen Fällen als gleichförmig (homogen) vorausgesetzt. In einer zweiten Mitteilung werden dieselben Fragen bei Kreisringmembranen unter ungleichförmigem, statischem Spannungszustand gelöst werden, der den bekannten *Laméschen* Gleichungen genügt, die den allein möglichen rotationssymmetrischen Ausgangszustand beschreiben. Auch elliptische Membranen sollen später analog untersucht werden.

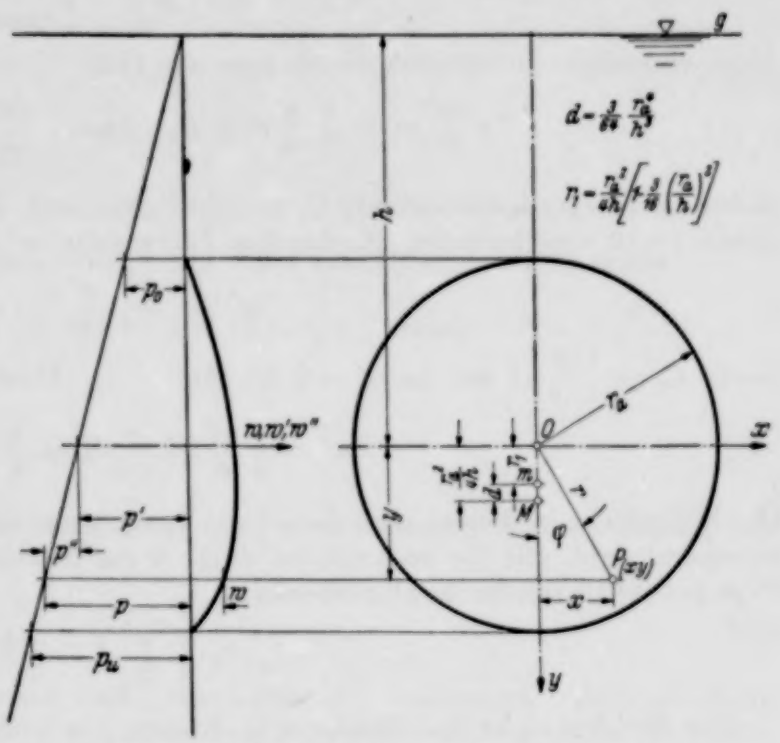

Abb. 1. Die Kreismembran unter hydrostatischem Druck.

Auf Anregung des Verfassers wurde ferner von Herrn Dipl.-Ing. *K.-E. Meier-Dörnberg* am Institut für Angewandte Mechanik und Schwingungstechnik der Technischen Hochschule Darmstadt die Vollkreismembran auch experimentell überprüft, worüber in einer späteren Arbeit des Genannten berichtet wird. Die Versuchsergebnisse stimmen ausgezeichnet mit der Berechnung überein.

2. Die Auswölbung der Vollkreismembran. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Membran in einer vertikalen Ebene angenommen werden, in der sie einem einseitigen Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt ist (Abb. 1). Ist h die Tiefe des Membranmittelpunktes 0 unter der Oberflächenverschneidungsgeraden g und r_a der Membranhalbmesser, so sind mit γ als spezifischem Gewicht der Flüssigkeit die Einheitsdrücke p_u bzw. p_o im untersten bzw. obersten Membranpunkt

$$p_u = \gamma\,(h + r_a)\,, \qquad p_o = \gamma\,(h - r_a)\,. \tag{1a, b}$$

Der Druck p in irgend einem durch die Polarkoordinaten r, φ (Abb. 1) gegebenen Punkte P kann nun durch

$$p = p' + p'' \tag{2}$$

dargestellt werden, wobei p' den Druck im Membranmittelpunkt 0, p'' aber den mit der Tiefe $r\cos\varphi$ linear veränderlichen Anteil von p bedeutet. Es ist somit wegen (1a, b)

$$p' = \frac{1}{2}\,(p_u + p_o) = \gamma\,h\,, \qquad p'' = \frac{1}{2}\,(p_u - p_o)\,\frac{r\cos\varphi}{r_a} = \gamma\,r\cos\varphi\,. \tag{3a, b}$$

Mit (3a, b) ergibt sich der Gesamtdruck p gemäß (2) zu

$$p = \gamma\,(h + r\cos\varphi)\,.$$

Um die Wölbfläche der Membran zu bestimmen, müßte man sie eigentlich als dünne Haut betrachten und mit endlicher Auslenkung w (Abb. 1) rechnen, wodurch alle Gleichungen nichtlinear würden. Die Erfahrung zeigt jedoch[1], daß man die zu erwartenden Verformungen auch mit der gewöhnlichen linearen Membrantheorie in guter Näherung beschreiben kann. Man darf daher die zu p' und p'' gehörigen Teilauslenkungen w' und w'' gesondert berechnen und die erhaltenen Ergebnisse addieren (w', w'' bedeuten hier also keine Ableitungen).

Ist S die für alle Schnittrichtungen aller Membranpunkte gleiche Kraft je Längeneinheit, so lautet[2] die Differentialgleichung für die Auslenkung w'

$$S\,r\,\frac{d^2w'}{dr^2} + S\,\frac{dw'}{dr} + p'\,r = 0 \tag{4}$$

oder in selbstadjungierter Schreibweise auch

$$\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dw'}{dr}\right) + \frac{p'}{S}\,r = 0\,. \tag{4a}$$

Nach einmaliger Integration erhält man aus (4a)

$$r\,\frac{dw'}{dr} = -\frac{1}{2}\,\frac{p'}{S}\,r^2 + C_1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dw'}{dr} = -\frac{1}{2}\,\frac{p'}{S}\,r + \frac{C_1}{r}\,, \tag{5}$$

wobei die Integrationskonstante C_1 verschwinden muß, da die Neigung dw'/dr im Membranmittelpunkt $r = 0$ verschwindet. Nochmalige Integration ergibt

$$w' = -\frac{1}{4}\,\frac{p'}{S}\,r^2 + C_2\,,$$

worin $C_2 = \frac{1}{4}\,\frac{p'}{S}\,r_a^2$ ist, da $w' = 0$ ist für $r = r_a$. Damit folgt

$$w' = \frac{1}{4}\,\frac{p'}{S}\,(r_a^2 - r^2) = \frac{1}{4}\,\frac{\gamma\,h}{S}\,(r_a^2 - r^2)\,. \tag{6}$$

Die Wölbfläche in diesem einfachen Falle konstanten Überdruckes p' ergibt sich somit als Rotationsparaboloid, mit der Senkrechten durch 0 zur Membranebene als Rotationsachse. Für $r = 0$ folgt aus (6) als maximale Durchsenkung

$$w'_{max} = \frac{1}{4}\,\frac{p'}{S}\,r_a^2 = \frac{1}{4}\,\frac{\gamma\,h}{S}\,r_a^2\,. \tag{6a}$$

Das Gleichgewicht der Membran in Richtung w erfordert die Beziehung

$$p' \cdot r_a^2\pi = S\left(-\frac{dw'}{dr}\right)_{r_a} \cdot 2\,r_a\pi \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dw'}{dr}\right)_{r_a} = -\frac{1}{2}\,\frac{p'}{S}\,r_a, \text{ somit (5) mit } C_1 = 0 \text{ und } r = r_a,$$

was als anschauliche Kontrolle dienen mag.

---

[1] Man vgl. hierzu die verwandte Aufgabe der Auswölbung einer spannungslosen Kreismembran unter seitlichem Überdruck, die zunächst eine Näherungslösung in *A. Föppl*, Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. 3, S. 336, Aufg. 53, 14. Aufl. (1944) und dann nach Herleitung der strengen Gleichungen in Bd. 5 1907, § 24, S. 132—144 durch *H. Hencky*, Z. Math. Phys. 63 (1915) S. 311, eine strengere Lösung mittels unendlicher Reihen gefunden hat. Hierbei ist freilich die Verschärfung von etwas anderer als der oben erwähnten Art. Man vgl. hierzu auch *A.* u. *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. 1, 2. Aufl., (1924) S. 216—226.

[2] Man vgl. hierzu *K. Karas*, Österr. Ing. Arch. Bd. X (1956), Heft 2—3, S. 200—220. Im Schwingungsfalle ergab hier das Gleichgewicht eines Membran-Elementes bei positiver Beschleunigung, somit in Richtung $-w$ fallender Trägheitskraft und Außerachtlassung der im statischen Falle nicht auftretenden Querkraftschnittgrößen Q mit S statt S_r die Gleichgewichtsgleichung

$$\left(S\,\frac{\partial w}{\partial r} + S\,r\,\frac{\partial^2 w}{dr^2} - m\,y\,r\,\frac{\partial^2 w}{dt^2}\right)dr\,d\varphi = 0\,,$$

wo m die räumliche Dichte des Membranmaterials bedeutet [man vgl. Gl. (5) ebendort]. Da nun p' in die Richtung $+w$ gemäß Abb. 1 weist, so ist das Vorzeichen des dritten Termes umzukehren. Teilt man die durch diesen Term dargestellte Trägheitskraft durch die Oberfläche $r d\varphi\,dr$ des Elementes, so erhält man die Flächenbelastung desselben durch die Trägheitskräfte, nämlich $my\,\partial^2 w/\partial t^2$; ersetzt man diese durch $-p'$, so erhält man nach Kürzung durch $dr\,d\varphi$ sofort Gleichung (4), in der w' statt w geschrieben ist; y bedeutet die veränderliche) Membrandicke.

Um auch eine Lösung w'' für den antimetrischen Fall mit dem Druck p'' zu erhalten, muß ein Ansatz gemacht werden, der die vollständige Differentialgleichung der Membran[1]

$$S\frac{\partial w''}{\partial r}+S\,r\frac{\partial^2 w''}{\partial r^2}+\frac{S}{r}\frac{\partial^2 w''}{\partial \varphi^2}+p''\,r=0 \tag{7}$$

befriedigt, die wieder in selbstadjungierter Schreibweise lautet

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w''}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w''}{\partial \varphi^2}=-\frac{p''}{S}r\,. \tag{7a}$$

Führt man p'' aus (3b) in (7a) ein, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w''}{dr}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w''}{\partial \varphi^2}=-\frac{\gamma\cos\varphi}{S}r^2\,. \tag{8}$$

Da in (8) hinsichtlich φ nur die zweite Ableitung vorkommt, so erkennt man, daß der Ansatz

$$w''=R(r)\cos\varphi \tag{9}$$

die Gleichung (8) befriedigen wird, da dann der Faktor $\cos\varphi$ wegfällt. Man erhält so für $R(r)$ die totale, inhomogene Differentialgleichung[2]

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\frac{R}{r}=-\frac{\gamma}{S}r^2\,. \tag{10}$$

Man erkennt nun, daß man mit dem Ansatz

$$R=A\,r^3$$

ein partikuläres Integral von (10) gewinnen kann; denn seine Einführung in (10) ergibt

$$\frac{d}{dr}(3\,A\,r^3)-A\,r^2=-\frac{\gamma}{S}r^2 \quad\text{oder}\quad 9\,A\,r^2-A\,r^2=-\frac{\gamma}{S}r^2,\quad\text{somit}\quad A=-\frac{\gamma}{8\,S}.$$

Somit lautet das partikuläre Integral

$$R=-\frac{\gamma}{8\,S}r^3\,. \tag{11}$$

Zusammen mit dem bekannten allgemeinen Integral $C_1 r+C_2/r$ der homogenisierten Gleichung (10) erhält man also wegen (9) die Lösung

$$w''=\left(-\frac{\gamma}{8\,S}r^3+C_1 r+\frac{C_2}{r}\right)\cos\varphi\,, \tag{12}$$

in der C_1 und C_2 die Integrationskonstanten sind. Die Größe w'' verschwindet längs des horizontalen Durchmessers $\varphi=\pi/2$, wie es die Antimetrie von p'' erfordert. Da aber im Membran-Mittelpunkt $r=0$ nicht nur w'' verschwinden, sondern auch dw''/dr für jeden Winkel φ endlich bleiben muß, so folgt analog auch hier $C_2=0$. Die Konstante C_1 ergibt sich aus der Bedingung des Verschwindens von w'' für $r=r_a$ aus (12) zu $C_1=\gamma\,r_a^2/8\,S$.

$$C_1=\frac{1}{8}\frac{\gamma}{S}r_a^2;\quad C_2=0 \tag{12a, b}$$

Somit verbleibt für w''

$$w''=\frac{\gamma}{8\,S}r\,(r_a^2-r^2)\cos\varphi\,. \tag{13}$$

Für die gesamte Membranauslenkung w erhält man also mit (6)

$$w=w'+w''=\frac{\gamma}{8\,S}(r_a^2-r^2)\,(2\,h+r\cos\varphi)\,. \tag{14}$$

---

[1] Man vergleiche hierzu etwa *K. W. Wagner*, Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen (1947) § 73, die kreisförmige Membran, S. 394, Gl. (460a)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}=\frac{1}{w^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

mit $w^2=S/\mu$, worin $\mu=m\gamma$ die Masse der Flächeneinheit der Membran bedeutet. Ersetzt man z durch w'' und wieder $\mu\,\partial^2 w''/\partial t^2$ durch $-p''$ so folgt sofort (7).

[2] So verfährt auch *W. Flügge*, Bauing. 10 (1929) S. 221. Man vgl. auch *K. Girkmann*, Flächentragwerke, S. 246; 102, 3. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1954.

Um die Gestalt des Wölbhügels genauer zu ermitteln, ist die Lage und Größe von w_{max} festzustellen. Da w von den Polarkoordinaten r und φ abhängt, hat man

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\gamma}{8\,S}\left[-2\,r\,(2\,h + r\cos\varphi) + (r_a^2 - r^2)\cos\varphi\right] = 0\,,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = -\frac{\gamma}{8\,S}\,(r_a^2 - r^2)\,r\sin\varphi = 0\,.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\varphi = 0$ und damit aus der ersten

$$-4\,r\,h - 2\,r^2 + r_a^2 - r^2 = 0 \quad \text{oder} \quad 3\,r^2 + 4\,r\,h - r_a^2 = 0$$

mit der Wurzel

$$r_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{4\,h^2 + 3\,r_a^2} - 2\,h\right); \tag{15}$$

denn das negative Wurzelvorzeichen würde zu einem Wert $r_2 < 0$ führen, dessen Absolutbetrag größer als r_a wäre, dessen zugeordnetes Extremum somit außerhalb der Membran liegen und also hier nicht interessieren würde: w_{max} (Punkt m in Abb. 1) liegt also auf dem vertikalen Membrandurchmesser um r_1 nach (15) tiefer als der Membranmittelpunkt 0. Da nun bekanntlich der Druckmittelpunkt M um $r_a^2/4\,h$ tiefer liegt als der Membranmittelpunkt 0, so liegt Punkt m höher als Punkt M, wenn $r_a^2/4\,h - r_1 > 0$ oder

$$\left(\frac{r_a^2}{4\,h} + \frac{2}{3}\,h\right) - \frac{1}{3}\sqrt{4\,h^2 + 3\,r_a^2} > 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{r_a^2}{4\,h} + \frac{2}{3}\,h\right)^2 > \frac{1}{9}\,(4\,h^2 + 3\,r_a^2)$$

ist. In der Tat ist aber:

$$\left(\frac{r_a^2}{4\,h}\right)^2 + \frac{r_a^2}{3} + \frac{4}{9}\,h^2 > \frac{4}{9}\,h^2 + \frac{r_a^2}{3}\,,$$

wie die Ausrechnung zeigt: Der Punkt m des Wölbscheitels liegt stets höher als der Druckmittelpunkt M und dieser Unterschied wird um so kleiner, je größer h ist, insbesondere fallen für $h = \infty$ beide Punkte m und M mit dem Membranmittelpunkt 0 zusammen, wie zu erwarten war.

Für die Differenz $d = \overline{mM}$ findet man durch Entwicklung der Wurzel

$$d = \frac{r_a^2}{4\,h} - r_1 = \frac{r_a^2}{4\,h} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{4\,h^2 + 3\,r_a^2} - 2\,h\right) = \frac{r_a^2}{4\,h} - \frac{2}{3}\,h\left(\sqrt{1 + \frac{3}{4}\left(\frac{r_a}{h}\right)^2} - 1\right)$$

$$= \frac{r_a^2}{4\,h} - \frac{2}{3}\,h\left[1 + \frac{3}{8}\left(\frac{r_a}{h}\right)^2 - \frac{1}{8}\cdot\frac{9}{16}\left(\frac{r_a}{h}\right)^4 + \frac{1}{16}\cdot\frac{27}{64}\left(\frac{r_a}{h}\right)^6 - \cdots - 1\right]$$

$$= \frac{3}{64}\,h\left(\frac{r_a}{h}\right)^4\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{r_a}{h}\right)^2 + \cdots\right], \qquad d = \frac{3}{64}\,\frac{r_a^4}{h^3}\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{r_a}{h}\right)^2\right]. \tag{16}$$

In den meisten Fällen wird man aber schon mit der gröberen Näherung

$$d = \frac{3}{64}\,\frac{r_a^4}{h^3} \tag{16a}$$

auskommen und braucht die genauere Formel (16) nicht heranzuziehen.

Für r_1 selbst erhält man aus (16)

$$r_1 = \frac{r_a^2}{4\,h} - d = \frac{r_a^2}{4\,h}\left[1 - \frac{3}{16}\left(\frac{r_a}{h}\right)^2 + \frac{9}{128}\left(\frac{r_a}{h}\right)^4 - \cdots\right] \tag{17}$$

mit der i. a. ausreichenden gröberen Näherung

$$r_1 = \frac{r_a^2}{4\,h}\left[1 - \frac{3}{16}\left(\frac{r_a}{h}\right)^2\right]. \tag{17a}$$

In Abb. 1 sind die Werte nach (16a) bzw. (17a) eingetragen. Den Wert w_{max} selbst erhält man aus (14), wenn man darin für r den Wert r_1 aus (15) bzw. (17) oder (17a) einführt und $\varphi = 0$ setzt; doch soll von der Wiedergabe der umständlichen Formel abgesehen werden. Im konkreten Falle verfährt man so, wie es im untenstehenden Beispiel 1 angegeben ist.

Einen weiteren Einblick in die Natur der Wölbfläche gewinnt man durch Berechnung der Höhen- oder Schichtenlinien oder Isohypsen, denen ein konstanter Wert w_c zukommt. Transfor-

miert man (14) auf das in Abb. 1 angegebene kartesische ($x\,y$-)System, so erhält man wegen $r\cos\varphi = y$

$$(y + 2h)(x^2 + y^2) - r_a^2 y + \frac{8 S w_e}{\gamma} - 2 h r_a^2 = 0\,. \tag{18}$$

Vergleicht man (18) mit der allgemeinen Gleichung der zirkularen Kurven dritter Ordnung[1]:

$$(y + a)(x^2 + y^2) + 2 g x + 2 f y + c = 0\,, \tag{19}$$

so folgt: Die Höhenlinien der ausgewölbten Kreismembran sind zirkulare Kurven dritter Ordnung mit der y-Achse als Symmetrale.

Von ihren getrennten beiden Zweigen kommen nur die Ovale innerhalb der Kreismembran in Frage. Ferner folgt aus (19): Der Membranmittelpunkt 0 ist der außerordentliche Brennpunkt oder das Zentrum der Isohypsen.

Da die horizontale Asymptote des Zweiges außerhalb der Membran nach (19) die Gleichung $y + a = 0$, somit im Zusammenhalte mit (18) die Gleichung $y = -2h$ besitzt, so folgt weiter: Die gemeinsame horizontale Asymptote aller Höhenlinien der ausgewölbten Membran liegt um dieselbe Höhe h über dem Spiegel g, wie das Zentrum 0 unter demselben. Da der Hauptpunkt der Kurve[2] auf der gemeinsamen Asymptote im Unendlichen liegt und die Mittellinie die Gleichung $y = -h$ besitzt[3], so folgt: Die Mittellinie aller Isohypsen der ausgewölbten Membran liegt in der Oberflächenverschneidungsgeraden g.

Von Interesse können auch die Kurven konstanter radialer Neigung $(\partial w/\partial r)_e$ und konstanter azimutaler Neigung $(\partial w/r\,\partial\varphi)_e$ sein. Für erstere[4] erhält man aus (14)

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\gamma}{8 S}\left[(r_a^2 - 3 r^2)\cos\varphi - 4 h r\right]. \tag{20}$$

Ist $r > \frac{1}{3}\sqrt{3}\, r_a$, so hat man die absolut größten Neigungen $\partial w/\partial r$ für $\varphi = 0^0$ zu erwarten und erhält aus (20)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{\varphi = 0} = -\frac{\gamma}{8 S}(3 r^2 + 4 h r - r_a^2)\,. \tag{20a}$$

Das Verschwinden dieser Neigung führt wieder zum Wert r_1 in (15) zurück. Die absolut größte Neigung erhält man aus (20a) für $r = r_a$ zu

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{\varphi = 0,\, r_a} = -\frac{\gamma r_a}{4 S}(2 h + r_a)\,. \tag{20b}$$

Analog findet man für $\varphi = \pi$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{\varphi = \pi} = -\frac{\gamma}{8 S}(r_a^2 + 4 h r - 3 r^2) \tag{20c}$$

mit dem Randwerte

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{\varphi = \pi,\, r_a} = -\frac{\gamma r_a}{4 S}(2 h - r_a)\,. \tag{20d}$$

Der Vergleich von (20b) mit (20d) erweist, daß die Neigung im untersten Membranpunkt nach (20b) größer ist als im obersten Membranpunkt nach (20d). Für $h = r_a$, wobei die obere horizontale Tangente an die Membran mit der Oberflächenverschneidungsgeraden g zusammenfällt, ein Fall, der unten numerisch noch weiter verfolgt wird, ist sie z. B. unten dreimal so groß wie oben. Im Membranmittelpunkt $r = 0$ erhält man aus (20a) bzw. aus (20c)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{\varphi = 0,\, r = 0} = \frac{\gamma r_a^2}{8 S}\,; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{\varphi = \pi,\, r = 0} = -\frac{\gamma r_a^2}{8 S}\,. \tag{20e,f}$$

---

[1] *G. Loria*, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Bd. 1., S. 33 Gl. (4) 2. Aufl. (1910).

[2] Er hat nach *G. Loria*, Gl. (6) S. 33 die Koordinaten $x = (2af - c)/2g$, $y = -a$, wobei die Bedeutung der Konstanten aus (19) folgt. Wegen $g = 0$ ist hier $x = \infty$, $y = -2h$.

[3] *G. Loria*, a. a. O. S. 34, Gl. (7).

[4] Es ist eine Kurve sechster Ordnung, deren Gleichung in kartesischen Koordinaten lautet

$$(x^2 + y^2)^2 (3 y + 4 h)^2 - (x^2 + y^2)\left[2 r_a^2 y\,(3 y + 4 h) + \left(\frac{8 S}{\gamma}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_e\right)^2\right] + r_a^4 y^2 = 0;$$

sie ist symmetrisch zur y-Achse.

Ferner ergibt sich für die azimutale Neigung[1] aus (14)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} = -\frac{\gamma}{8\,S}(r_a^2 - r^2)\sin\varphi \tag{21}$$

mit $\varphi = \pi/2$ als absolut größten Neigungswerten, die also in der x-Achse liegen,

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\gamma}{8\,S}(r_a^2 - r^2)\,. \tag{21a}$$

Hingegen verschwinden diese azimutalen Neigungen ersichtlich für die y-Achse mit $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ und außerdem für alle Berandungspunkte, wie aus (21) mit $r = r_a$ folgt und wie es auch der Randbefestigung entspricht.

Für $r = 0$ folgt aus (21a)

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2},\,r=0} = -\frac{\gamma\, r_a^2}{8\,S}\,; \tag{21b}$$

da im Membranmittelpunkt 0 die azimutale Neigung in der x-Achse gleich ist der radialen Neigung in der y-Achse, so erkennt man, daß (20f) mit (21b) übereinstimmen muß. (In beiden Gleichungen ist nämlich die Fortschreitungsrichtung von unten nach oben.)

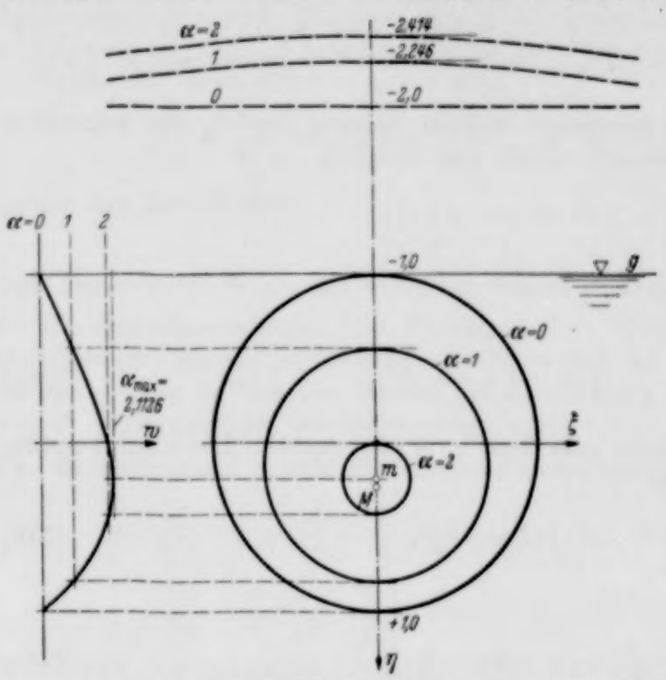

Abb. 2. Die Höhenlinien der Wölbfläche der Kreismembran unter hydrostatischem Druck für die durch die Werte α gegebenen Höhenlagen der zur Basis der Wölbfläche parallelen Schnittebenen.

Um das Volumen V des Wölbhügels zu berechnen, braucht man bloß w' in (6) zu berücksichtigen, da sich die vom antimetrischen Teil w'' in (13) herrührenden Volumsanteile wegheben. Mit

$$dV = w' r\, d\varphi\, dr$$

erhält man also nach (6) und (3a)

$$V = \frac{\gamma h}{4\,S}\,2\int_0^{r_a}\int_0^{\pi}(r_a^2 - r^2)\, r\, d\varphi\, dr$$

$$= \frac{\pi}{8}\,\frac{\gamma h\, r_a^4}{S}\,, \tag{22a}$$

$$w_{mittl} = \frac{V}{r_a^2\,\pi} = \frac{1}{8}\,\frac{\gamma h\, r_a^2}{S}\,. \tag{22b}$$

Das Volumen V des Wölbhügels ist dem spez. Flüssigkeitsgewichte γ, ferner der Druckhöhe h und der vierten Potenz des Membranhalbmessers r_a direkt, der Schnittgröße S jedoch umgekehrt proportional.

Zahlenbeispiel 1. Es sei durchweg $h = r_a$, die obere Tangente an die Membran also zusammenfallend mit der Oberflächenverschneidungsgeraden g.

Erteilt man nun der Auslenkung den konstanten Wert w_e und führt dimensionslose Größen ein mittels der Festsetzungen

$$\xi = \frac{x}{r_a}\,, \quad \eta = \frac{y}{r_a}\,, \quad \frac{w_e\, S}{\gamma\, r_a^3} = \frac{\alpha}{8} \quad \text{oder} \quad w_e = \frac{\alpha}{8}\,\frac{\gamma\, r_a^3}{S}\,, \tag{23a—d}$$

so erhält man nach Teilung durch r_a^3 aus (18), wenn darin w durch w_e ersetzt wird

$$(\eta + 2)(\xi^2 + \eta^2) - \eta + \alpha - 2 = 0\,.^2 \tag{24}$$

[1] Auch diese ist eine Kurve sechster Ordnung mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2\, x^2 - (x^2 + y^2)\left[2\, r_a^2\, x^2 + \left(\frac{8\,S}{\gamma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)_e\right)^2\right] + r_a^4\, x^2 = 0\,.$$

Diese Kurve ist zu beiden Koordinatenachsen symmetrisch.

[2] Ist allgemein $h/r_a = \nu$, so folgt statt (24) die Gleichung

$$(2\nu + \eta)(\xi^2 + \eta^2) - \eta + \alpha - 2\nu = 0\,.$$

Aus ihr erkennt man, daß alle durch $\alpha = 2\nu$ charakterisierten Höhenlinien durch ihren außerordentlichen Brennpunkt 0 (Membranmittelpunkt) hindurchgehen. Wegen $\nu = 1$ gilt dies also hier für die Höhenlinie $\alpha = 2$, wie man auch der Tabelle 1 entnimmt.

Für $w_e = \alpha = 0$ folgt aus (24)

$$(\eta + 2)(\xi^2 + \eta^2 - 1) = 0\,. \tag{24a}$$

Gleichung (24a) wird befriedigt durch die Asymptote $\eta = -2$ aller Höhenlinien und durch den Membrankreis $\xi^2 + \eta^2 = 1$, die zusammen eine spezielle Isohypse darstellen. Für $w_e > 0$ ist auch $\alpha > 0$ und in Tabelle 1 sind für einige interessierende η-Werte die zugehörigen ξ-Werte nach (24) für $\alpha = 1{,}2$ zusammengestellt, die dann der Konstruktion der Höhenlinien in Abb. 2 dienten. Dort sind auch noch die hier nicht weiter interessierenden Zweige von (24) strichliert angedeutet.

Tabelle 1. *Die nach* (24) *zu verschiedenen* η*-Werten berechneten* ξ*-Werte für* $\alpha = 1$ *und* $\alpha = 2$.

$\alpha = 1$						$\alpha = 2$			
η	ξ	η	ξ	η	ξ	η	ξ	η	ξ
— 2,246	0	— 0,1	± 0,681	+ 0,6	± 0,505	— 3	komplex	0	0
— 0,6	komplex	0	± 0,707	+ 0,7	± 0,373	— 2,414	0	+ 0,1	± 0,201
— 0,557	0	+ 0,1	± 0,718	+ 0,8	± 0,053	— 2,3	± 1,542	+ 0,2	± 0,2275
— 0,5	± 0,289	+ 0,2	± 0,711	+ 0,803	0	— 2,2	± 2,48	+ 0,3	± 0,201
— 0,4	± 0,464	+ 0,3	± 0,690	+ 0,9	komplex	— 2,1	± 4,07	+ 0,4	± 0,0816
— 0,3	± 0,568	+ 0,4	± 0,650			— 2	± ∞	+ 0,414	0
— 0,2	± 0,636	+ 0,5	± 0,592			— 1	komplex	+ 0,5	komplex

Der Ort r_1 des Scheitels des Wölbungshügels ergibt sich nach (15) zu

$$r_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right) r_a = 0{,}2159\, r_a\,.$$

Hierzu findet man mittels einfacher Rechnung zunächst den zugehörigen Wert von α aus (24), wenn man dort $\xi = 0$ und

$$\eta = \eta_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{7} - 2\right)$$

einsetzt, zu

$$\alpha_{max} = \frac{1}{27}\left(20 + 14\sqrt{7}\right) = 2{,}1126\,.$$

Damit erhält man aus (23d)

$$w_{max} = \frac{1}{8} \cdot 2{,}1126\, \frac{\gamma\, r_a^3}{S} = 0{,}264075\, \frac{\gamma\, r_a^3}{S}\,.$$

Der Wert α_{max} ist in Abb. 2 eingetragen, desgleichen sind dort im Aufriß auch die Punkte m (Scheitellage) und M (Druckmittelpunkt) angegeben. Natürlich hätte man w_{max} mittels des oben angegebenen Wertes für r_1 und $h = r_a$ auch direkt aus (14) bestimmen können. Hätte man sich statt dessen der ungenaueren Formel (17a) bedient, so hätte man

$$r_1 = \frac{13}{64}\, r_a = 0{,}2031\, r_a$$

erhalten, welcher Wert gegen den oben angegebenen genauen noch um beinahe 6% zu niedrig ist. Benutzt man die genauere Gleichung (17), so erhält man mit $h = r_a$

$$r_1 = \frac{r_a}{4}\left(1 - \frac{3}{16} + \frac{9}{128}\right) = 0{,}2207\, r_a\,.$$

Dieser Wert ist gegenüber dem genauen Wert wieder zu hoch, die Abweichung beträgt aber nur mehr 2,23%. Schließlich folgt aus (22b) mit $h = r_a$

$$w_{mittl} = 0{,}125\, \frac{\gamma\, r_a^3}{S}, \quad \text{somit} \quad \frac{w_{mittl}}{w_{max}} = \frac{0{,}125}{0{,}264} = 0{,}474\,.$$

Endlich folgt aus (22a)

$$V = 0{,}3927\, \frac{\gamma\, r_a^5}{S}\,.$$

3. Die Kreisringmembran mit fester Innenkreisplatte. In Abb. 3 ist eine Kreisringmembran im Aufriß und Kreuzriß in ihrer voraussichtlichen Auswölbungsform dargestellt. Es gelten wieder die Gleichungen (1) bis (5) für die achsensymmetrische Auslenkung w'. Da aber nunmehr die Integra-

tionskonstante C_1 in (5) nicht mehr verschwindet, so ergibt ihre Integration

$$w' = -\frac{1}{4}\frac{p'}{S}r^2 + C_1 \ln r + C_2 . \tag{25}$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 werden durch die Forderung bestimmt, daß die Auslenkung w' für $r = r_a$ und $r = r_i$ verschwinden muß. Es folgt

$$C_1 = \frac{1}{4}\frac{p'}{S}\frac{r_a^2 - r_i^2}{\ln \frac{r_a}{r_i}}, \quad C_2 = \frac{1}{4}\frac{p'}{S}\frac{-r_a^2 \ln r_i + r_i^2 \ln r_a}{\ln \frac{r_a}{r_i}}. \tag{26a,b}$$

Mit (26a,b) ergibt (25) die achsensymmetrische Lösung

$$w' = \frac{1}{4}\frac{p'}{S}\cdot\frac{1}{\ln \frac{r_a}{r_i}}\left(-r^2 \ln \frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln \frac{r}{r_i} + r_i^2 \ln \frac{r_a}{r}\right). \tag{27}$$

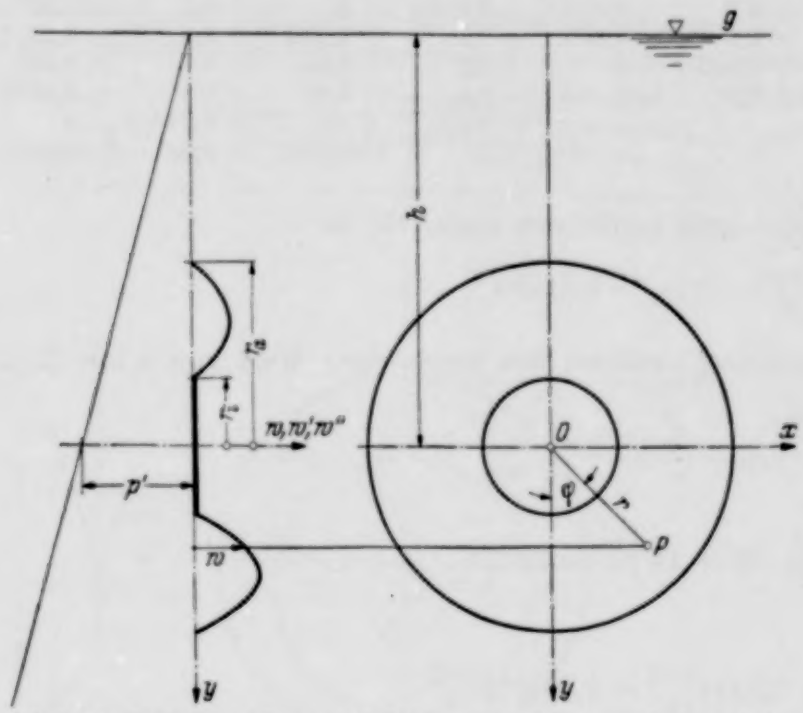

Abb. 3. Die Kreisringmembran mit fester Innenkreisplatte unter hydrostatischem Druck.

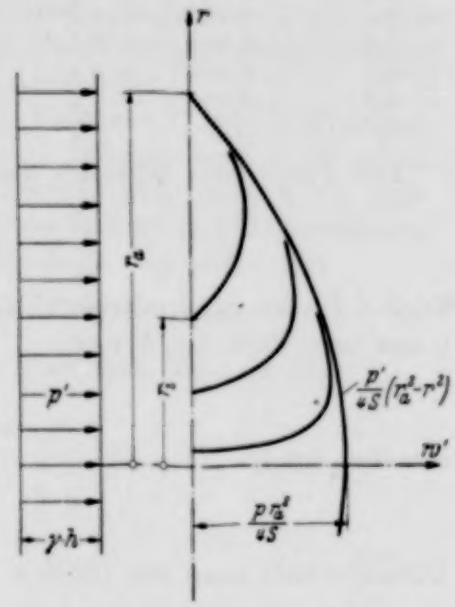

Abb. 4. Die Meridiankurven der Kreisringmembran unter konstantem Druck p', die zu verschiedenen Werten von r_i bei festem r_a gehören.

Läßt man in (27) r_i gegen Null gehen, so nähert man sich dem interessanten Fall einer Kreismembran, deren Mittelpunkt (etwa durch einen Stift) festgehalten ist. Bei diesem Grenzübergang verschwindet der dritte Term in (27), während die beiden ersten

$$\lim_{r_i \to 0} w' = \frac{p'}{4S}\lim_{r_i \to 0}\left(r_a^2 \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} - r^2\right) = \frac{p'}{4S}(r_a^2 - r^2) \tag{6}$$

ergeben, somit wieder die Auslenkungsform (6) der Vollmembran, die hiermit durch den vorgenommenen Grenzübergang aus (27) neuerdings bestätigt wurde. Andererseits ist aber der Membranmittelpunkt 0 festgehalten, kann also keine Auslenkung erfahren. Dieser scheinbare Widerspruch wird durch (5) erklärt, wenn man dort für C_1 den Wert aus (26a) einführt; man erhält

$$\frac{dw'}{dr} = \frac{p'}{4S}\left(-2r + \frac{r_a^2 - r_i^2}{\ln \frac{r_a}{r_i}}\frac{1}{r}\right) \tag{28}$$

und erkennt, daß dw'/dr für kleine Werte r sehr große Werte annimmt, so daß sich die Membran an den Stift um so inniger anschmiegt, je kleiner dessen Halbmesser r_i ist; zugleich schmiegt sie sich dabei größtenteils an die Gestalt der Vollmembran (6) außerhalb des Stiftes an. Je größer aber r_i wird, um so weniger wird das geschehen, längs eines um so kleineren Stückes wird sich insbesondere die Meridiankurve der Kreisringmembran der „Grenzkurve" der Vollmembran anschmiegen, wie das Abb. 4 im einzelnen erläutert.

Verfolgt man insbesondere die Neigungen der Meridiankurven vom Innenhalbmesser r_i über r_m, wo sie verschwinden, bis r_a, so erhält man gemäß (28)

$$\left(\frac{dw'}{dr}\right)_i = \frac{p'}{4\,S}\left(-2\,r_i + \frac{r_a^2 - r_i^2}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\,\frac{1}{r_i}\right) > 0\,, \tag{29a}$$

$$\left(\frac{dw'}{dr}\right)_a = \frac{p'}{4\,S}\left(-2\,r_a + \frac{r_a^2 - r_i^2}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\,\frac{1}{r_a}\right) < 0\,, \tag{29b}$$

$$\frac{dw'}{dr} = 0 \quad \text{für} \quad r = r_m = \sqrt{\frac{r_a^2 - r_i^2}{2\ln\frac{r_a}{r_i}}}\,. \tag{30}$$

Da der Absolutbetrag von (29a) ersichtlich größer ist als der von (29b) (da $r_i < r_a$ ist), so erkennt man, daß die Meridiankurve der Ringmembran am Innenrande stets steiler verläuft als am Außenrande, wie es ja auch aus Abb. 4 ersichtlich ist.

Für den antimetrischen Teil w'' der Auslenkung kann ebenfalls auf (12) zurückgegriffen werden. Da auch w'' für $r = r_a$ und $r = r_i$ verschwinden muß, folgt für die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 in (12)

$$C_1 = \frac{\gamma}{8\,S}\,(r_a^2 + r_i^2)\,, \qquad C_2 = -\frac{\gamma}{8\,S}\,r_a^2\,r_i^2\,. \tag{31a,b}$$

Mit (31a,b) ergibt nun (12) die Lösung

$$w'' = \frac{\gamma}{8\,S}\left[-r^3 + (r_a^2 + r_i^2)\,r - \frac{r_a^2\,r_i^2}{r}\right]\cos\varphi\,. \tag{32}$$

Schließlich erhält man aus (27) und (32) die Gesamtauslenkung w mit (3a) zu

$$w = w' + w'' = \frac{\gamma}{8\,S}\left\{\frac{2\,h}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\left(-r^2\ln\frac{r_a}{r_i} + r_a^2\ln\frac{r}{r_i} + r_i^2\ln\frac{r_a}{r}\right) + \left[-r^3 + (r_a^2 + r_i^2)\,r - \frac{r_a^2\,r_i^2}{r}\right]\cos\varphi\right\}. \tag{33}$$

Für $w = w_c$ werden die Höhenlinien durch (33) in Polarkoordinaten dargestellt. Die Berechnung dieser transzendenten Kurven wird im Zahlenbeispiel 2 gezeigt werden.

Weitere Einblicke in die Natur der Wölbflächen gewinnt man wieder durch Betrachtung der radialen und azimutalen Neigungen. Man erhält aus (33)

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\gamma}{8\,S}\left[\frac{2\,h}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\left(\frac{r_a^2 - r_i^2}{r} - 2\,r\ln\frac{r_a}{r_i}\right) + \left(r_a^2 + r_i^2 - 3\,r^2 + \frac{r_a^2\,r_i^2}{r^2}\right)\cos\varphi\right]. \tag{34}$$

Der erste Ausdruck in der runden Klammer verschwindet wieder für $r = r_m$ in (30) und ist für $r = r_i$ positiv und $r = r_a$ negativ. Der zweite Ausdruck in der runden Klammer hat für $r = r_i$ den Wert $2(r_a^2 - r_i^2) > 0$ und für $r = r_a$ den Wert $-2(r_a^2 - r_i^2) < 0$. Wählt man also für $\cos\varphi$ den größten Wert, dessen er fähig ist $(+1)$, so wird man sowohl am Innen-, wie am Außenrande die absolut größten Neigungen der Meridianlinie der Wölbfläche zu erwarten haben, die also in der y-Achse, unterhalb der x-Achse liegen, wie es auch die Anschauung nahelegt. Diese sind

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{\varphi=0,\,r_i} = \frac{\gamma}{8\,S}\left[\frac{2\,h}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\left(\frac{r_a^2 - r_i^2}{r_i} - 2\,r_i\ln\frac{r_a}{r_i}\right) + 2\,(r_a^2 - r_i^2)\right] > 0\,, \tag{35a}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{\varphi=0,\,r_a} = \frac{\gamma}{8\,S}\left[\frac{2\,h}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\left(\frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a} - 2\,r_a\ln\frac{r_a}{r_i}\right) - 2\,(r_a^2 - r_i^2)\right] < 0\,. \tag{35b}$$

Ebenso erhält man für die azimutale Neigung aus (33)

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{\gamma}{8\,S}\left(r^2 - r_a^2 - r_i^2 + \frac{r_a^2\,r_i^2}{r^2}\right)\sin\varphi\,. \tag{36}$$

Diese Neigung verschwindet für $r = r_a$ und $r = r_i$ (unabhängig von φ), somit an beiden Rändern, wie es sein muß. Für $\varphi = \pi/2$, somit für Punkte der x-Achse, erhält die azimutale Neigung ihre absolut größten Werte, wie es auch bei der Vollmembran (21) der Fall war. Dem entspricht es, daß in Abb. 5 in der Nähe der ξ-Achse die Gratpunkte, das sind die Punkte maximaler Winkel-

werte φ der Isohypsen merklich geringere Distanz aufweisen: der „Gratanstieg" ist dort am steilsten. Analoges gilt auch für Abb. 10. In jeder Richtung φ erhält sie gemäß der Ableitung $2\,r - 2\,r_a^2\,r_i^2/r^3 = 0$ für

$$r = r_n = \sqrt{r_a\,r_i}\,, \tag{37}$$

also für das geometrische Mittel der beiden Halbmesser ihren Kleinstwert, der in der x-Achse zum absoluten Minimum

$$\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2},\,r_n} = -\frac{\gamma}{8\,S}\,(r_a - r_i)^2 \tag{38}$$

wird. Daß dasselbe nach (38) negativ ist, also ein Minimum darstellt, ist anschaulich aus der Tatsache erklärbar, daß der Wölbhügel bei zunehmendem Winkel φ abnimmt und für $\varphi = \pi$ einem Kleinstwert seiner Höhe (einem Sattelpunkt) zustrebt.

Bei Berechnung des Volumens des Wölbhügels ist auch hier zu beachten, daß der Teil w'' nichts beiträgt und also gemäß (22a) und (27) anzusetzen ist zu

$$V = 2\int_{r_i}^{r_a}\int_{0}^{\pi} w'\,r\,d\varphi\,dr = \frac{\gamma\,h}{4\,S}\,\frac{2\,\pi}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\int_{r_i}^{r_a}\left(-\,r^2\ln\frac{r_a}{r_i} + r_a^2\ln\frac{r}{r_i} + r_i^2\ln\frac{r_a}{r}\right)r\,dr\,.$$

Mittels der Hilfsformel

$$\int r\ln r\,dr = \frac{1}{2}\,r^2\ln r - \frac{r^2}{4} + C \tag{39}$$

findet man schließlich

$$V = \frac{\pi\,\gamma\,h}{8\,S\ln\frac{r_a}{r_i}}\left[(r_a^4 - r_i^4)\ln\frac{r_a}{r_i} - (r_a^2 - r_i^2)^2\right]. \tag{40}$$

Für $\lim r_i \to 0$ folgt aus (40) wieder (22a) in Übereinstimmung mit Abb. 4. Teilt man diesen Ausdruck noch durch die Fläche $r_a^2\,\pi$ der Basis, so erhält man die mittlere Auswölbung[1]

$$w_{mittl} = \frac{\gamma\,h}{8\,S\ln\frac{r_a}{r_i}}\left[\frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a^2}\ln\frac{r_a}{r_i} - \frac{(r_a^2 - r_i^2)^2}{r_a^2}\right]. \tag{41}$$

Zahlenbeispiel 2. Wie im früheren Beispiel sei $h = r_a$; ferner sei $r_a = 2\,r_i$ gewählt. Die Gestalt von (33) legt es nahe, hier die Polarkoordinaten beizubehalten und die Höhenlinienschar punktweise derart zu berechnen, daß zu einem einmal gewählten w_c für verschiedene Werte r die zugehörigen Werte von $\cos\varphi$ aus (33) ermittelt werden. Auch hier ist es bequem, mit dimensionslosen Größen zu rechnen. Neben der Größe α in (23c, d) mögen hier noch die weiteren dimensionslosen Größen

$$\varrho = \frac{r}{r_a}\,,\quad \mu = \frac{r_a}{r_i}\,,\quad \text{somit}\quad \frac{r}{r_i} = \varrho\,\mu\,,\quad \frac{r_a}{r} = \frac{1}{\varrho} \tag{42a–d}$$

eingeführt werden. Damit ergibt (33), wenn es sofort nach $\cos\varphi$ aufgelöst wird, wegen $\mu = 2$

$$\cos\varphi = \frac{\alpha + Z}{-N}\,,\quad Z = 2\,(\varrho^2 - 1) - \frac{3}{2\ln 2}\ln\varrho\,,\quad N = \varrho^3 - \frac{5}{4}\,\varrho + \frac{1}{4\,\varrho}\quad (0{,}5 \leqq \varrho \leqq 1)\,. \tag{43a, b, c}$$

Für $\alpha = 0$ und $\varrho = 1$ und ebenso für $\alpha = 0$ und $\varrho = 1/2$ ergibt sich aus (43) $\cos\varphi = 0/0$, d. h. $w = 0$ für alle Punkte der beiden Randkreise $r = r_a$ und $r = r_i$, wie es tatsächlich den physikalischen Gegebenheiten entspricht. Dadurch ist eine willkommene Kontrolle von (43) bzw. (33) gegeben.

In Tabelle 2 sind zunächst für die in der ersten und letzten Spalte angegebenen Werte von ϱ die Funktionen Z und N in (43b, c) berechnet worden (Spalten 2 und 3) und mittels dieser Werte wurden dann für die in den Spalten 4 bis 8 angegebenen α-Werte, die den Höhen der einzelnen Isohypsen entsprechen, die Werte von $\cos\varphi$ nach (43a) berechnet, die der Konstruktion von Abb. 5 dienten.

[1] Hierbei wurde, um Vergleiche mit anderen Fällen zu ermöglichen, die Innenkreisplatte als Teil der Membran angesehen, so daß durch die Gesamtfläche $r_a^2\,\pi$ der Basis geteilt werden mußte.

Tabelle 2. *Die den angegebenen Werten von ϱ entsprechenden Funktionswerte Z und N sowie die denselben und den gewählten α-Werten entsprechenden Werte von $\cos\varphi$*

	Nach (43b, c)		Werte von $\cos\varphi$ nach (43a) für					
ϱ	Z	N	$\alpha = 0{,}05$	0,1	0,2	0,3	0,4	ϱ
0,5	0	0	—	—	—	—	—	0,5
0,55	— 0,10134	— 0,0666	— 0,770	— 0,0201	—	—	—	0,55
0,6	— 0,17461	— 0,1173	—	— 0,635	+ 0,2165	—	—	0,6
0,65	— 0,22273	— 0,1534	—	— 0,7995	— 0,148	0,503	—	0,65
0,7	— 0,24809	— 0,1748	—	— 0,847	— 0,275	0,2975	0,870	0,7
0,75	— 0,25241	— 0,1823	—	— 0,836	— 0,2875	0,261	0,809	0,75
0,8	— 0,23720	— 0,1755	—	— 0,782	— 0,212	0,358	0,927	0,8
0,85	— 0,20334	— 0,1544	— 0,993	— 0,669	— 0,0216	0,626	—	0,85
0,9	— 0,15191	— 0,1182	— 0,860	— 0,439	+ 0,406	—	—	0,9
0,95	— 0,08399	— 0,0669	— 0,508	+ 0,239	—	—	—	0,95
1	0	0	—	—	—	—	—	1

Wo in der Tabelle Striche angegeben sind, gibt es keine reellen Winkel φ.

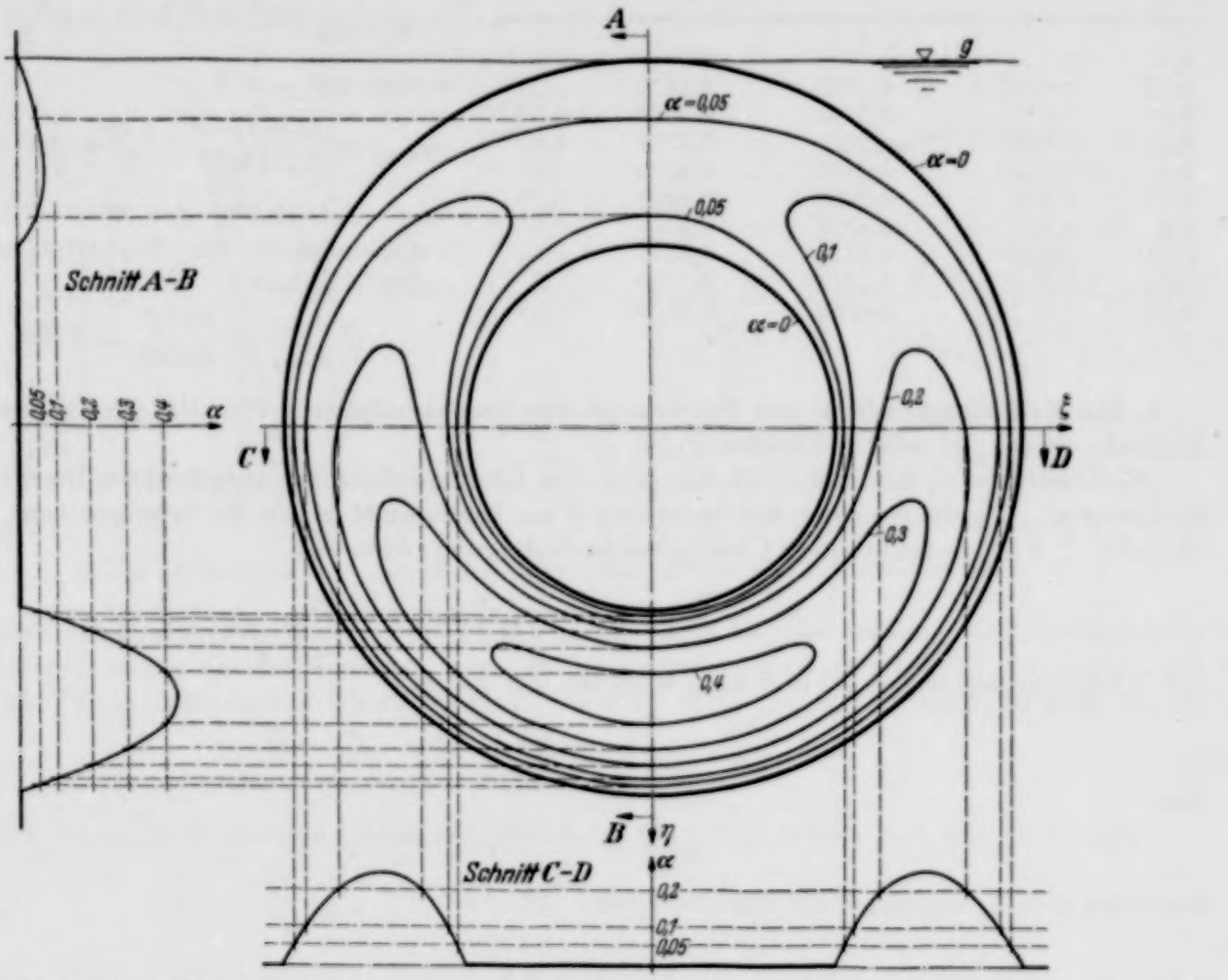

Abb. 5. Die Höhenlinien der Wölbfläche der Kreisringmembran mit fester Innenkreisplatte unter hydrostatischem Druck für die durch die Werte α gegebenen Höhenlagen der zur Basis der Wölbfläche parallelen Schnittebenen.

In Abb. 5 ist außerdem links im Kreuzriß die Meridiankurve der Wölbfläche gezeichnet, die sie im Schnitte mit der Vertikalebene und unterhalb jene, die sie im Schnitte mit der Horizontalebene durch den Membranmittelpunkt 0 erzeugt. Für die erstere ist $\cos\varphi = \pm 1$, für letztere $\cos\varphi = 0$. Damit folgt aus (43a)

$$\text{für } \cos\varphi = -1 : \alpha = N - Z\,, \quad \text{für } \cos\varphi = +1 : \alpha = -N - Z\,, \quad \text{für } \cos\varphi = 0 : \alpha = -Z\,. \tag{43 d, e, f}$$

Zur Konstruktion der erwähnten Meridiankurven wurden nun für die in Tabelle 2 angegebenen Werte von ϱ, N und Z nach (43d, e, f) die bezüglichen Werte α in Tabelle 3 berechnet, so daß in Abb. 5 die erwähnten Meridiankurven leicht punktweise mittels des angegebenen α-Maßstabes konstruiert werden konnten (Schnitt A—B bzw. C—D in Abb. 5).

Der Größtwert von α ergibt sich nach Tabelle 3 für $\cos\varphi = +1$ und $\varrho = 0{,}75$ zu $\alpha_{max} = 0{,}4347$. Dem entspricht nach (23d)

$$w_{max} = \frac{0{,}4347}{8}\,\frac{\gamma\, r_a^3}{S} = 0{,}0543\,\frac{\gamma\, r_a^3}{S}.$$

Dieser Zahlenwert beträgt nur 20,6% des entsprechenden Zahlenwertes der Vollmembran.

Man erhält ferner nach (40) ($h = r_a$)

$$V = \frac{\gamma\,\pi\, r_a^5}{8\,S\ln\mu}\left[\frac{\mu^4-1}{\mu^4}\ln\mu - \frac{(\mu^2-1)^2}{\mu^4}\right].$$

Mit $\mu = 2$ folgt

$$V = \frac{15\ln 2 - 9}{128\ln 2}\,\pi\,\frac{\gamma\, r_a^5}{S} = 0{,}049475\,\frac{\gamma\, r_a^5}{S}.$$

Auch dieser Zahlenwert beträgt nur 12,6% des Wertes 0,3927 der Vollmembran.

Tabelle 3. *Die zu den angegebenen Werten von ϱ und $\cos\varphi$ nach* (43d, e, f) *berechneten Werte von α*

ϱ	$\cos\varphi = -1$	$\cos\varphi = 0$	$\cos\varphi = +1$	ϱ
0,5	0	0	0	0,5
0,55	0,0347	0,1013	0,1679	0,55
0,6	0,0573	0,1746	0,2919	0,6
0,65	0,0693	0,2227	0,3761	0,65
0,7	0,0733	0,2481	0,4229	0,7
0,75	0,0701	0,2524	0,4347	0,75
0,8	0,0617	0,2372	0,4127	0,8
0,85	0,0489	0,2033	0,3577	0,85
0,9	0,0337	0,1519	0,2701	0,9
0,95	0,0171	0,0840	0,1509	0,95
1	0	0	0	1

Schließlich folgt aus (41)

$$w_{mittl} = \frac{\gamma\, r_a^3}{8\,S\ln\mu}\left[\left(1-\frac{1}{\mu^4}\right)\ln\mu - \left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{8\,\mu^4\ln\mu}\left[(\mu^4-1)\ln\mu - (\mu^2-1)^2\right]\frac{\gamma\, r_a^3}{S},$$

woraus mit $\mu = 2$

$$w_{mittl} = \frac{15\ln 2 - 9}{128\ln 2}\cdot\frac{\gamma\, r_a^3}{S} = 0{,}015748\,\frac{\gamma\, r_a^3}{S}$$

folgt (d. i. 12,6% des Wertes 0,125 der Vollmembran). Als Verhältnis w_{mittl}/w_{max} ergibt sich hier

$$\frac{w_{mittl}}{w_{max}} = \frac{0{,}0157}{0{,}0543} = 0{,}290.$$

4. Die Kreisringmembran mit frei beweglicher Innenkreisplatte. Für die achsensymmetrische Auslenkung w' gilt wieder Gleichung (5).

Die Konstante C_1 bestimmt sich hier aus dem Gleichgewicht der ausgelenkten Innenscheibe in Richtung w'. Da die Neigung der Spannung S am Innenrande gegen die Scheibenebene, nämlich $(dw'/dr)_i < 0$ ist, so lautet diese Gleichgewichtsbedingung (Abb. 6a)

$$S\left(-\frac{dw'}{dr}\right)_i 2\,r_i\,\pi = p'\,r_i^2\,\pi = \gamma\,h\,r_i^2\,\pi.$$

Somit folgt hieraus wegen (5) und nach Kürzung durch $r_i\,\pi$

$$2\,S\left(\frac{\gamma\,h\,r_i}{2\,S} - \frac{C_1}{r_i}\right) = \gamma\,h\,r_i, \quad \text{also} \quad C_1 = 0.$$

Aus

$$w' = -\frac{1}{4}\,\frac{\gamma\,h}{S}\,r^2 + C_2$$

bestimmt sich C_2 wegen $w' = 0$ für $r = r_a$ zu

$$C_2 = \frac{\gamma\,h\,r_a^2}{4\,S}.$$

Es ergibt sich somit

$$w' = \frac{\gamma\,h}{4\,S}\,(r_a^2 - r^2), \quad \frac{dw'}{dr} = -\frac{\gamma\,h}{2\,S}\,r. \tag{44a, b}$$

Gleichung (44a) stimmt völlig mit der entsprechenden Gleichung (6) bei Vollmenbranen überein. Für die maximale Neigung der Meridiankurve am Außenrande r_a bzw. ihre minimale am Innenrande r_i erhält man aus (44b)

$$\left(\frac{dw'}{dr}\right)_a = -\frac{\gamma\,h}{2\,S}\,r_a \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{dw'}{dr}\right)_i = -\frac{\gamma\,h}{2\,S}\,r_i. \tag{45a, b}$$

Für die Auslenkung s der Innenscheibe (Abb. 6a) folgt aus (44a)

$$s = \frac{\gamma\,h}{4\,S}\,(r_a^2 - r_i^2), \tag{46}$$

und für das Gesamtvolumen V, das von der ausgelenkten Membran samt Innenkreisscheibe gebildet wird, erhält man mit (44a) und (46)

$$V = \frac{\gamma h}{4 S} 2\pi \int_{r_i}^{r_a} (r_a^2 - r^2)\, r\, dr + r_i^2 \pi \frac{\gamma h}{4 S} (r_a^2 - r_i^2) = \frac{\gamma \pi h}{8 S} (r_a^4 - r_i^4)\,. \tag{47}$$

Teilung durch $r_a^2 \pi$ ergibt die mittlere Auslenkung:

$$w_{mittl} = \frac{\gamma h}{8 S} \frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a^2}\,. \tag{47a}$$

Für $r_i \to 0$ geht (47) wieder über in (22a) und (47a) in (22b), da dann der Fall der Vollmembran resultiert.

Das Volumen V nach (47) bei freier Innenscheibe erweist sich natürlich größer als das bei festgehaltener Innenscheibe nach (40), das um $\frac{\pi \gamma h}{8 S \ln (r_a/r_i)} \cdot (r_a^2 - r_i^2)^2$ kleiner ist als jenes; dieser Tatbestand entspricht auch der Anschauung.

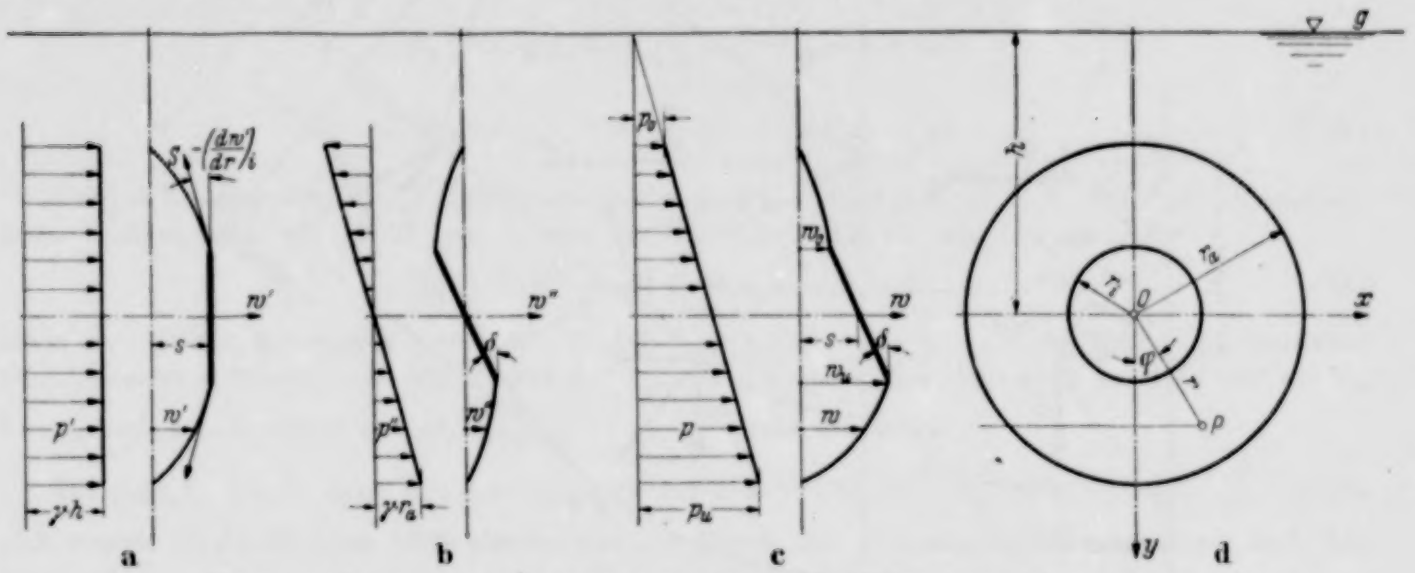

Abb. 6. Die Kreisringmembran mit frei beweglicher Innenkreisplatte unter hydrostatischem Druck.

Größere Schwierigkeiten bereitet im vorliegenden Falle die Bestimmung der antimetrischen Auslenkung w'' sowie die des Winkels δ der mit ihr verbundenen Schiefstellung der Innenscheibe (Abb. 6b). Für w'' gilt wieder Gleichung (12). Da $w'' = 0$ für $r = r_a$ sein muß, so folgt aus (12)

$$\frac{\gamma}{8 S} r_a^4 = C_1 r_a^2 + C_2\,. \tag{48}$$

Für $r = r_i$ ist $w_i'' \neq 0$, sondern gleich der Erhebung $\delta\, r_i \cos\varphi$, womit sich aus (12) ergibt

$$\left(-\frac{\gamma}{8 S} r_i^3 + C_1 r_i + \frac{C_2}{r_i}\right) \cos\varphi = \delta \cdot r_i \cos\varphi$$

oder

$$\frac{1}{8} \frac{\gamma}{S} r_i^4 = C_1 r_i^2 + C_2 - \delta\, r_i^2\,. \tag{49}$$

Zu (48) und (49) tritt als weitere Gleichung jene, die durch Betrachtung des Momentengleichgewichts der Innenscheibe um die x-Achse ($\varphi = \pi/2$) erfließt, wobei es genügt, nur ein unteres Viertel der Innenscheibe zu betrachten und die Ergebnisse zu vervierfachen. Da nach (3b)

$$p'' = \gamma\, r \cos\varphi$$

ist, so ergibt sich als Moment der Drücke p'' auf die Flächenelemente $r\, d\varphi\, dr$ (Abb. 7a, b) um die x-Achse offenbar

$$Mom_{p''} = 4 \int_0^{r_i} \int_0^{\pi/2} p''\, r\, d\varphi\, dr \cdot r \cos\varphi = 4\gamma \int_0^{r_i} r^3\, dr \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4} \gamma \pi\, r_i^4\,. \tag{50a}$$

Diesem Momente $Mom_{p''}$ hält das Moment der Schnittkraft S der Membran am Rande r_i das Gleichgewicht. Ihre Wirkungslinie liegt windschief zur Momentenbezugsachse x. Sie sei zunächst in eine Komponente $S'' = S \sin(-\partial w''/\partial r)_i = S(-\partial w''/\partial r)_i$ senkrecht zur (vertikalen) (x, y)-Ebene mit dem aus Abb. 7a ersichtlichen Hebelsarme $r_i \cos\varphi$ und in die zur (x, y)-Ebene paralelle Komponente $S' = S \cos(-\partial w''/\partial r)_i = S$ zerlegt (Abb. 7c), wobei der vorgenommene Ersatz der Kreisfunktionen durch ihr Argument nur Fehler klein von zweiter bzw. dritter Ordnung verursacht. Die Komponente S' werde nun in der Parallelebene zur (x, y)-Ebene in S'_x und S'_y zerlegt (Abb. 7b), welch letztere Komponente bezüglich der x-Achse nach Abb. 7a den Hebelsarm $r_i \delta \cos\varphi$ besitzt. Das Momentengleichgewicht bezüglich der x-Achse erfordert nach Abb. 7a

$$Mom_{p''} - Mom_{S''} - Mom_{S'_y} = 0\,. \tag{51}$$

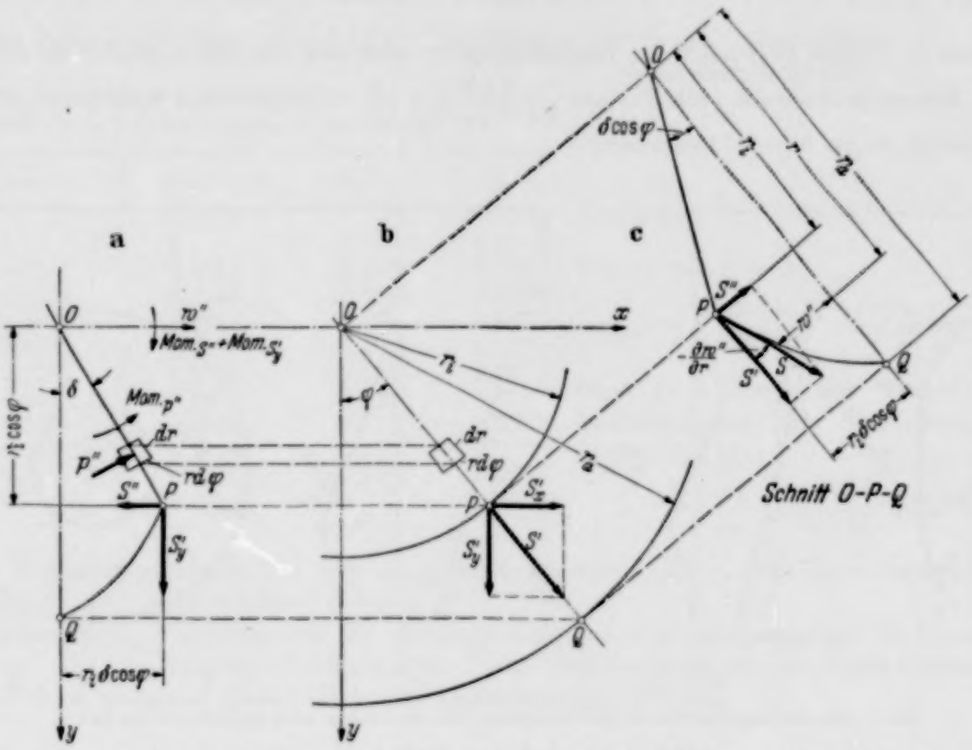

Abb. 7. Die am Rande der schiefgestellten Innenkreisplatte angreifende Kraft S und ihre Komponenten bei frei beweglicher Innenkreisplatte.

Wegen (12) findet man leicht

$$Mom_{S''} = 4S\left(\frac{3}{8}\frac{\gamma}{S} r_i^2 - C_1 + \frac{C_2}{r_i^2}\right)\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot r_i \cos\varphi\, r_i\, d\varphi = S\left(\frac{3}{8}\frac{\gamma}{S} r_i^4 - C_1 r_i^2 + C_2\right)\pi\,, \tag{50b}$$

$$Mom_{S'_y} = 4S\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot r_i \delta \cos\varphi \cdot r_i\, d\varphi = S\delta r_i^2 \pi\,. \tag{50c}$$

Mit (50a, b, c) erhält man aus (51)

$$\frac{1}{4}\gamma\pi r_i^4 = S\left(\frac{3}{8}\frac{\gamma}{S} r_i^4 - C_1 r_i^2 + C_2\right)\pi + S\delta r_i^2 \pi$$

oder nach einigen Vereinfachungen

$$\frac{1}{8}\frac{\gamma}{S} r_i^4 = C_1 r_i^2 - C_2 - r_i^2 \delta\,. \tag{52}$$

Gleichung (49) ergibt mit (52) sofort $C_1 = \frac{1}{8}\frac{\gamma}{S} r_i^2 + \delta$; $C_2 = 0$, und dies liefert mit (48) schließlich das Ergebnis

$$C_1 = \frac{1}{8}\frac{\gamma}{S} r_a^2\,, \quad C_2 = 0\,, \quad \delta = \frac{1}{8}\frac{\gamma}{S}(r_a^2 - r_i^2)\,. \tag{53a, b, c}$$

Da (53a, b) mit (12a, b) der Vollmembran übereinstimmt, gilt somit auch für die antimetrische Auslenkung w'' die dortige Gleichung (13), und da auch die Ausdrücke (6) und (44a) für die achsensymmetrische Auslenkung w', wie bereits bemerkt, übereinstimmen, so gilt dasselbe auch für die Gesamtauslenkung w nach (14) und für die Höhenlinien (Isohypsen) mit konstanten Auslenkungswerten w_e nach (18).

Auch bei der homogen gespannten Kreisringmembran unter hydrostatischem Druck sind bei vollkommen frei beweglicher Innenkreisplatte die Höhenlinien der Wölbfläche zirkulare Kurven dritter Ordnung mit der y-Achse als Symmetrale und dem Membranmittelpunkt 0 als außerordentlichem Brennpunkt.

Läßt man in (53c) r_i gegen Null gehen, so erhält man wieder die Neigung (20e), da dann die Innenkreisplatte Element der Tangentialebene an die Wölbfläche der Vollkreismembran im Mittelpunkt 0 wird, was als willkommene Kontrolle gelten mag. Auch die Kurven gleicher radialer und azimutaler Neigung sind dieselben, wie bei der Vollmenbran. Natürlich kommen von allen Kurven nur jene Zweige oder Teile derselben in Betracht, die innerhalb der Fläche der Kreisringmembran liegen.

Mit s in (46) und δ in (53c) findet man schließlich für die maximale Auslenkung w_u des untersten bzw. für die minimale w_o des obersten Randpunktes der Innenkreisplatte nach Abb. 6c.

$$w_u = s + r_i\,\delta = \frac{\gamma}{8\,S}\,(r_a^2 - r_i^2)\,(2\,h + r_i)\,, \tag{54a}$$

$$w_o = s - r_i\,\delta = \frac{\gamma}{8\,S}\,(r_a^2 - r_i^2)\,(2\,h - r_i)\,. \tag{54b}$$

Zahlenbeispiel 3. Wie bei Zahlenbeispiel 2 sei $h = r_a$ und $\mu = r_a/r_i = 2$. Mit den dimensionslosen Größen (23a—d) erhält man wieder die Gleichung (24) für die Höhenlinien

$$(\eta + 2)\,(\xi^2 + \eta^2) - \eta + \alpha - 2 = 0\,. \tag{24}$$

Setzt man hierin $\xi = \pm 1/2$, $\eta = 0$, wie es den Endpunkten des um s ausgelenkten horizontalen Durchmessers entspricht, so erhält man $\alpha = 3/2$, ein Ergebnis, das man auch aus (46) mit $s = w_e$, $h = r_a$ und $\mu = 2$, somit aus $w_e = \frac{3}{16}\,\frac{\gamma\,r_a^3}{S} = \frac{\alpha}{8}\,\frac{\gamma\,r_a^3}{S}$ leicht bestätigt.

Aus (54a,b) erhält man mit den obigen Festsetzungen $w_u = \frac{15}{64}\,\frac{\gamma\,r_a^3}{S}$ bzw. $w_o = \frac{9}{64}\,\frac{\gamma\,r_a^3}{S}$, so daß sich wegen (23d) für jene Höhenlinien, die am Rande der Innenkreisplatte beginnen, sich das Intervall

$$\frac{9}{8} \leqq \alpha \leqq \frac{15}{8}$$

ergibt; sie finden in Sehnen parallel zur x-Achse über die Innenkreisplatte hinweg ihren Abschluß. Für die in Tabelle 4 angegebenen α-Werte wurde nun (24) nach Wahl der dort angegebenen η-Werte

Tabelle 4. *Die zu den angegebenen Werten von η und α nach (24) berechneten Werte von ξ*

η	$\alpha = 0{,}25$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1{,}25$	$\alpha = 1{,}5$	$\alpha = 1{,}75$	η
—0,9	—	—	—	—	—	—	—	—0,9
—0,8	±0,390	—	—	—	—	—	—	—0,8
—0,7	±0,564	±0,355	—	—	—	—	—	—0,7
—0,6	±0,680	±0,532	±0,322	—	—	—	—	—0,6
—0,5	±0,764	±0,646	±0,500	±0,289	—	—	—	—0,5
—0,4	±0,827	±0,726	±0,609	±0,464	—	—	—	—0,4
—0,3	±0,874	±0,784	±0,685	±0,568	±0,418	—	—	—0,3
—0,2	±0,906	±0,826	±0,737	±0,636	±0,515	—	—	—0,2
—0,1	±0,926	±0,851	±0,772	±0,681	±0,576	—	—	—0,1
0	±0,935	±0,866	±0,790	±0,707	±0,612	±0,500	—	0
0,1	±0,933	±0,868	±0,796	±0,717	±0,629	±0,525	—	0,1
0,2	±0,920	±0,857	±0,786	±0,710	±0,625	±0,527	—	0,2
0,3	±0,895	±0,832	±0,765	±0,689	±0,605	±0,507	—	0,3
0,4	±0,857	±0,795	±0,726	±0,651	±0,565	±0,464	±0,333	0,4
0,5	±0,806	±0,742	±0,671	±0,592	±0,500	±0,387	±0,223	0,5
0,6	±0,737	±0,670	±0,593	±0,505	±0,400	±0,251	—	0,6
0,7	±0,646	±0,570	±0,482	±0,374	±0,217	—	—	0,7
0,8	±0,520	±0,425	±0,303	±0,053	—	—	—	0,8
0,9	±0,322	±0,134	—	—	—	—	—	0,9

zur Berechnung von ξ ausgenutzt, was jeweils nur Quadratwurzelziehungen benötigte. Nur die η-Werte der Schnittpunkte der Höhenlinien mit der Ordinatenachse $\xi = 0$ erheischen die Lösung der kubischen Gleichung

$$\eta^3 + 2\,\eta^2 - \eta + \alpha - 2 = 0\,, \tag{24b}$$

deren in Betracht kommenden Wurzelwerte der Übersicht wegen in Tabelle 5 zusammengestellt sind, wo unten auch die Ordinatenwerte der Sehnen, die ja Teilstücke der betreffenden Höhenlinien darstellen, eingetragen sind. Alle Berechnungen wurden, wie in den früheren Beispielen, mit einem 25 cm-Rechenschieber durchgeführt.

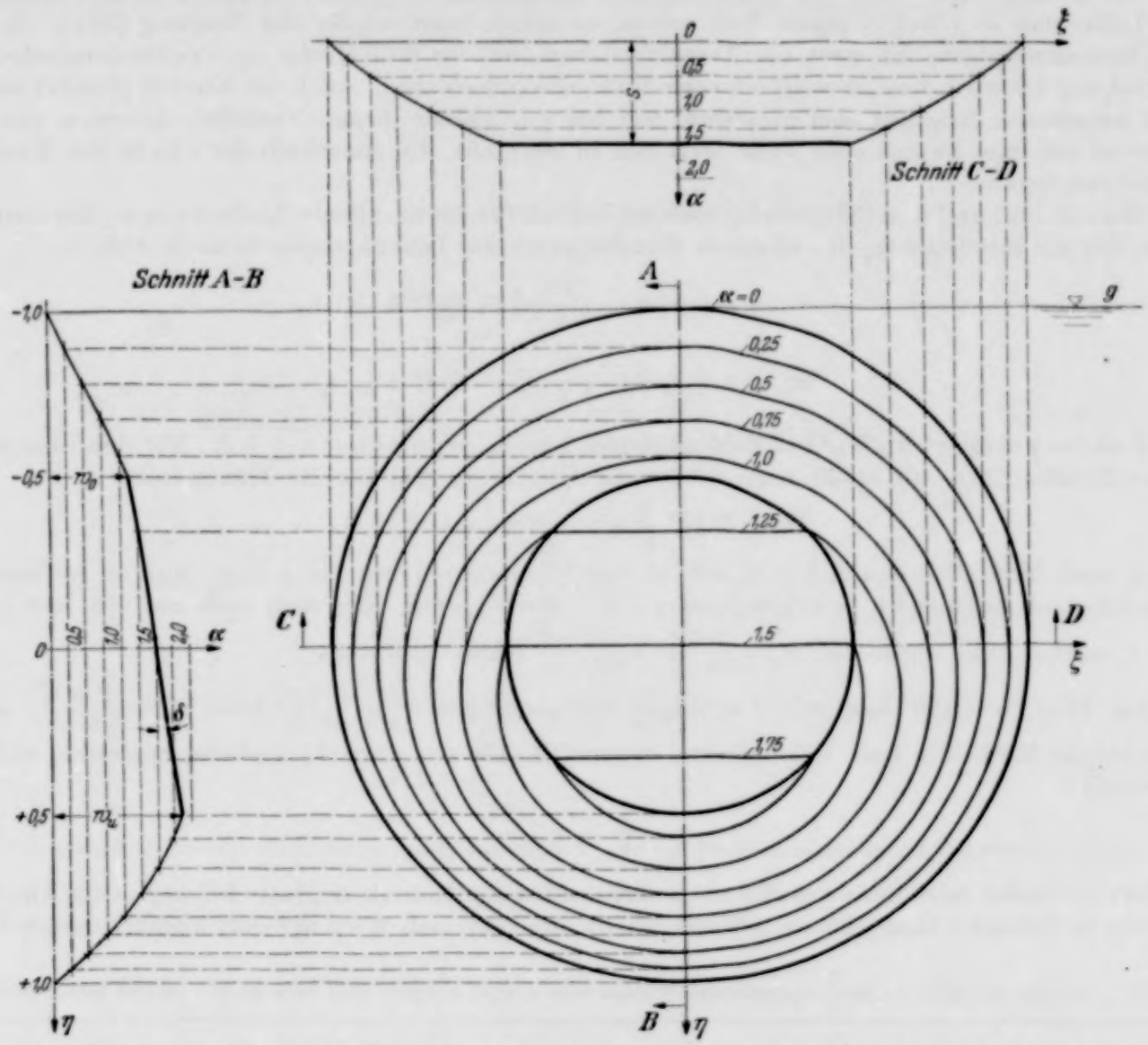

Abb. 8. Die Höhenlinien der Wölbfläche der Kreisringmembran mit frei beweglicher Innenkreisplatte unter hydrostatischem Druck für die durch die Werte α gegebenen Höhenlagen der zur Basis der Wölbfläche parallelen Schnittebenen.

Tabelle 5. *Die zu den angegebenen Werten von α und für $\xi = 0$ nach (24b) berechneten und im Membrankreisring liegenden η-Werte*

ξ	$\alpha = 0{,}25$	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1{,}25$	$\alpha = 1{,}5$	$\alpha = 1{,}75$	ξ
0	+0,960	+0,910	+0,859	+0,802	+0,737	+0,660	+0,564	0
0	−0,881	−0,770	−0,663	−0,555	−0,333	0	+0,333	0
					Sehnen-Schnittpunkte			

Diese Ergebnisse sind in Abb. 8 dargestellt, die neben dem Höhenlinienplane auch links einen Vertikalschnitt $A - B$ und oben einen Horizontalschnitt $C - D$ durch die Wölbfläche der Membran samt ausgelenkter Innenkreisplatte zeigt.

Für das Volumen V des Wölbhügels erhält man nach (47)

$$V = \frac{15\,\pi}{128}\,\frac{\gamma\,r_a^5}{S} = 0{,}36816\,\frac{\gamma\,r_a^5}{S}\,,$$

und für die mittlere Auslenkung w_{mittl} findet man nach (47a)

$$w_{mittl} = \frac{15}{128}\frac{\gamma r_a^3}{S} = 0{,}11719\frac{\gamma r_a^3}{S};$$

da hier $w_{max} = w_u = \frac{15}{64}\frac{\gamma r_a^3}{S}$ ist, so erhält man für das Verhältnis

$$\frac{w_{mittl}}{w_{max}} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,.$$

Es ist hier also wesentlich höher als für Vollkreismembranen, da das Vorhandensein der Innenkreisplatte für die ganze Fläche ihres Bereiches eine größere Auslenkung erzwingt.

5. Die Kreisringmembran mit elastisch befestigter Innenkreisplatte. Die elastische Lagerung der Innenkreisplatte soll sich sowohl auf deren Verschiebung in Richtung w' oder s, als auch auf deren Verdrehung um ihren horizontalen Durchmesser beziehen. Die erstere Art elastisch nachgiebiger Lagerung wirkt sich beim achsensymmetrischen Belastungsfall unter dem konstanten Druck $p' = \gamma h$, die letztere beim antimetrischen unter dem linear veränderlichen Druck $p'' = \gamma r \cos\varphi$ aus.

Beim achsensymmetrischen Belastungsfall gelten für die Auslenkung w und ihre Ableitung wieder die Gleichungen (5) und (25). Den zwei Integrationskonstanten C_1 und C_2 sowie der unbekannten Plattenverschiebung s stehen die Gleichgewichtsgleichung der Innenkreisplatte gegen Verschieben sowie die Forderungen gegenüber, daß $w' = 0$ am Membranaußenrande $r = r_a$ und $w' = s$ am Membraninnenrande $r = r_i$ sein muß. Diese beiden Bedingungen ergeben mit (25):

$$\frac{\gamma h}{4S} r_a^2 = C_1 \ln r_a + C_2\,, \quad \frac{\gamma h}{4S} r_i^2 + s = C_1 \ln r_i + C_2\,. \tag{55a,b}$$

Gemäß Abb. 9a lautet hier die Gleichgewichtsbedingung

$$S\left(\frac{dw'}{dr}\right)_i \cdot 2\,r_i\,\pi + \gamma\,h\,r_i^2\,\pi - c_s\,s = 0$$

und ergibt mit (5)

$$2\pi S C_1 = c_s\,s\,. \tag{56}$$

Mit der Abkürzung

$$N = 2\pi S + c_s \ln\frac{r_a}{r_i} \tag{57}$$

ergibt die Lösung von (55a,b) und (56)

$$C_1 = \frac{\gamma h}{4SN}(r_a^2 - r_i^2)\,c_s, \quad C_2 = \frac{\gamma h}{4SN}\left[r_a^2\,2\pi S + (-r_a^2 \ln r_i + r_i^2 \ln r_a)\,c_s\right], \tag{58a,b}$$

$$s = \frac{\gamma h}{4SN}(r_a^2 - r_i^2)\,2\pi S\,. \tag{59}$$

Mit $c_s = 0$ wird aus (57) $N = 2\pi S$, und hiermit geht s in (59) über in $s = \frac{\gamma h}{4S}(r_a^2 - r_i^2)$, in voller Übereinstimmung mit dem Ergebnis (46), das für den nunmehr gültigen Fall mit freier Innenkreisplatte erhalten worden ist. Ebenso wird mit $c_s = \infty$ aus (59) $s = 0$, wie es dem Grenzfall mit fester Innenkreisplatte entspricht. Ebenso gewinnt man aus (58a,b) mit $c_s = 0$ sofort die Werte $C_1 = 0$, $C_2 = \gamma h\, r_a^2/4S$, wie sie bei freier Innenkreisplatte erhalten wurden. Man vgl. die Ergebnisse vor (44a, b).

Aus (25) und (58a,b) erhält man schließlich

$$w' = \frac{\gamma h}{4SN}\left[(r_a^2 - r^2)\,2\pi S + \left(-r^2 \ln\frac{r_a}{r_i} + r_a^2 \ln\frac{r}{r_i} + r_i^2 \ln\frac{r_a}{r}\right) c_s\right]. \tag{60}$$

Mit $c_s = 0$ erhält man aus (60) sofort wieder (44a), wie es der Ringmembran mit freier und ebenso mit $c_s = \infty$ sofort wieder (27), wie es jener mit fester Innenkreisplatte zukommt.

Mit der Hilfsformel (39) und mit Beachtung der Abkürzung (57) erhält man für das Volumen V des Wölbhügels unter der Ringmembran und Innenkreisplatte nach längeren Rechnungen

$$V = \frac{\gamma h \pi}{8SN}\left\{(r_a^4 - r_i^4)\cdot 2\pi S + \left[(r_a^4 - r_i^4)\ln\frac{r_a}{r_i} - (r_a^2 - r_i^2)^2\right] c_s\right\}, \tag{61}$$

woraus mit $c_s = 0$ bzw. $c_s = \infty$ sofort wieder die bekannten Ergebnisse (47) für freie bzw. (40) für feste Innenkreisplatte folgen. Teilt man V in (61) durch die Fläche $r_a^2 \pi$ der Basis, so erhält man

$$w_{mittl} = \frac{\gamma h}{8 S N}\left[\frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a^2} 2\pi S + \left[\frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a^2} \ln \frac{r_a}{r_i} - \frac{(r_a^2 - r_i^2)^2}{r_a^2}\right] c_s\right], \tag{62}$$

ein Ergebnis, das natürlich für $c_s = 0$ bzw. $c_s = \infty$ sofort wieder in (47a) für Membranen mit freier bzw. in (41) für solche mit fester Innenkreisplatte übergeht.

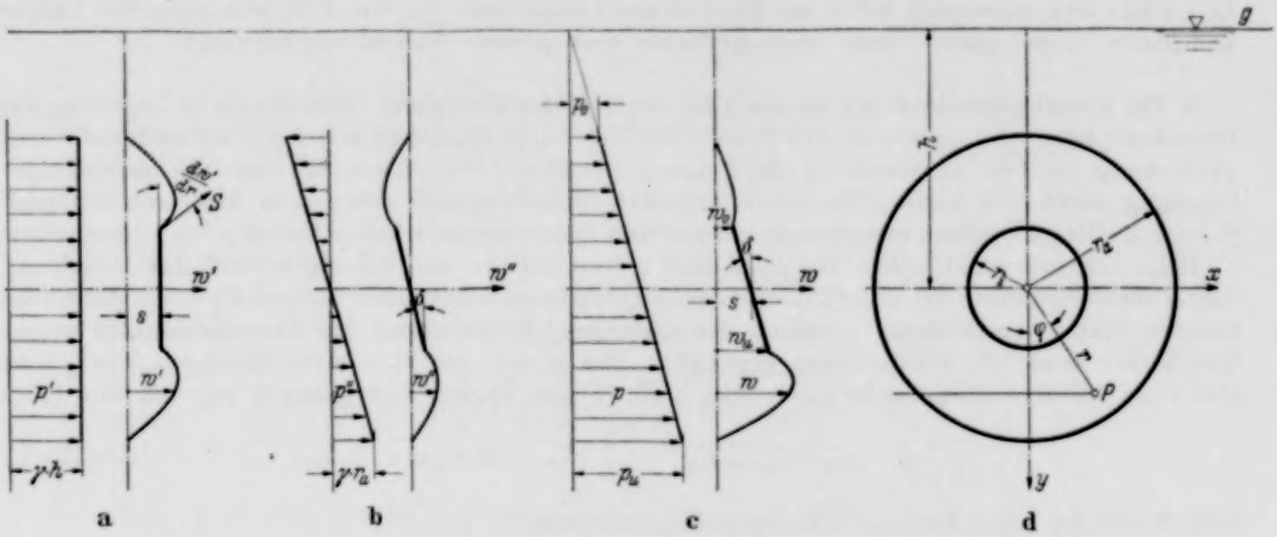

Abb. 9. Die Kreisringmembran mit elastisch gelagerter Innenkreisplatte unter hydrostatischem Druck.

Für die Berechnung des antimetrischen Falles nach Abb. 9b können ohne weiteres die Gleichungen (48) und (49), welche die Werte von w'' für den Außen- und Innenrand der Kreisringmembran vorschreiben, ferner Gleichung (50a) für das Moment der Drücke $p'' = \gamma r \cos\varphi$ und schließlich auch die Gleichungen (50b,c) für die Momente der Kraftkomponenten S'' und S'_y nach Abb. 7 direkt übernommen werden. Nur die Gleichung (51) ist wegen des durch c_d bedingten elastischen Drehwiderstandes zu erweitern; an ihrer Stelle gilt jetzt

$$Mom_{p''} - Mom_{S''} - Mom_{S'_y} - c_d \delta = 0\,. \tag{63}$$

Mit (50a,b,c) erhält man aus (63) nach kurzer Rechnung

$$\frac{1}{8}\frac{\gamma}{S} r_i^4 = C_1 r_i^2 - C_2 - \delta r_i^2 - \frac{c_d}{\pi S}\delta\,. \tag{64}$$

Addiert man (64) zu (49) und subtrahiert man es von (49), so folgt

$$C_2 = -\frac{c_d}{2\pi S}\delta \quad \text{und} \quad C_1 = \frac{1}{8}\frac{\gamma}{S} r_i^2 + \left(1 + \frac{c_d}{2\pi r_i^2 S}\right)\delta\,,$$

und die Einsetzung dieser Ergebnisse in (48) ergibt schließlich mit der Abkürzung

$$M = r_a^2 r_i^2 2\pi S + (r_a^2 - r_i^2) c_d \tag{65}$$

die Werte

$$C_1 = \frac{\gamma}{8 S M}\left[r_a^4 r_i^2 \cdot 2\pi S + (r_a^4 - r_i^4) c_d\right], \quad C_2 = -\frac{\gamma}{8 S M}(r_a^2 - r_i^2) r_a^2 r_i^2 c_d\,, \tag{66a,b}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{8 S M}(r_a^2 - r_i^2) r_a^2 r_i^2 \, 2\pi S\,. \tag{67}$$

Mit $c_d = 0$ erhält man aus (65) $M = r_a^2 r_i^2 \cdot 2\pi S$ und aus (66a,b) $C_1 = \gamma r_a^2/8S$ bzw. $C_2 = 0$, somit wieder (53a,b) und aus (67) $\delta = \gamma (r_a^2 - r_i^2)/8S$, somit wieder (53c), wie es dem Falle mit freier Innenkreisplatte entspricht, während $c_d = \infty$ ebenso die Ergebnisse (31a,b) für feste Innenkreis-

platte sowie $\delta = 0$ aus (67) liefert. Mit (66a,b) erhält man schließlich aus (12)

$$w'' = \frac{\gamma}{8\,S\,M}\left\{r_a^2\,r_i^2\,r\,(r_a^2 - r^2)\,2\pi\,S + (r_a^2 - r_i^2)\left[-r^3 + (r_a^2 + r_i^2)\,r - \frac{r_a^2\,r_i^2}{r}\right]c_d\right\}\cos\varphi\,. \tag{68}$$

Mit $c_d = 0$ folgt aus (68) im Verein mit (65) wieder Gleichung (13), die, wie nach (53a,b,c) gezeigt wurde, für den nun betrachteten Fall mit freier Innenkreisplatte gültig ist. Mit $c_d = \infty$ ergibt sich aber aus (68) mit (65) wieder die für feste Innenkreisplatte gültige Auslenkung w'' in (32).

Addiert man die symmetrische Auslenkung w' in (60) zur antimetrischen w'' in (68), so erhält man schließlich die Gesamtauslenkung gemäß Abb. 9c

$$w = w' + w'' = \frac{\gamma}{8\,S}\left\{(r_a^2 - r^2)\left(\frac{2\,h}{N} + \frac{r_a^2\,r_i^2\,r\cos\varphi}{M}\right)2\pi\,S\right.$$
$$\left. + \left(-r^2\ln\frac{r_a}{r_i} + r_a^2\ln\frac{r}{r_i} + r_i^2\ln\frac{r_a}{r}\right)\frac{2\,c_s\,h}{N} + (r_a^2 - r_i^2)\left[-r^3 + (r_a^2 + r_i^2)\,r - \frac{r_a^2\,r_i^2}{r}\right]\frac{c_d\cos\varphi}{M}\right\}. \tag{69}$$

In (69) ist N durch (57) und M durch (65) erklärt. Erteilt man w in (69) den konstanten Wert w_e, so stellt (69) für bestimmte Werte des Halbmesserverhältnisses $\mu = \frac{r_a}{r_i}$ und der Rückführungskonstanten c_s und c_d die Höhenlinien der Wölbfläche der Kreisringmembran in Polarkoordinaten dar, deren punktweise Berechnung genau so erfolgen kann wie es bei Gleichung (33) geschehen ist. (Man vergleiche unten Zahlenbeispiel 4.) Man hat also in (69) eine dreiparametrige Kurvenschar vor sich, von der natürlich nur die innerhalb der Membranfläche verlaufenden Teile von Bedeutung sind.

Auch die radialen und azimutalen Neigungen lassen sich aus (69) ohne weiteres durch Bildung der Differentiationen $\partial w/\partial r$ und $\partial w/r\,\partial\varphi$ herleiten und für konstante Werte dieser Neigungen erhält man nach Wahl des Verhältnisses $\mu = r_a/r_i$ jeweils wieder dreiparametrige Kurvenscharen in Polarkoordinaten mit $(\partial w/\partial r)_e$ bzw. $(\partial w/r\,\partial\varphi)_e$ und c_s und c_d als Parametern.

Zahlenbeispiel 4. Nimmt man auch hier, wie in den vorhergehenden Zahlenbeispielen $h = r_a$ an, behält ferner die dimensionslosen Größen in (23c,d) und in (42a—d) bei und führt schließlich für die elastischen Rückführungskonstanten c_s und c_d ebenfalls dimensionslose Größen durch

$$\sigma = \frac{c_s}{2\pi\,S}\,; \quad \tau = \frac{c_d}{2\pi\,S\,r_a^2} \tag{70a,b}$$

ein, so kann man (69) in der dimensionslosen Form darstellen:

$$\alpha - \frac{2(1-\varrho^2) + \sigma\ln\mu\left[2(1-\varrho^2) + 2\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\frac{\ln\varrho}{\ln\mu}\right]}{1 + \sigma\ln\mu} = \frac{\varrho(1-\varrho^2) + (\mu^2-1)\left[-\varrho^3 + \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right)\varrho - \frac{1}{\mu^2\,\varrho}\right]\tau}{1 + (\mu^2-1)\,\tau}\cos\varphi\,.$$

Mit den abkürzenden Funktionsbezeichnungen

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(\varrho) &= \frac{2(1-\varrho^2) + \sigma\ln\mu\left[2(1-\varrho^2) + 2\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\frac{\ln\varrho}{\ln\mu}\right]}{1 + \sigma\ln\mu}\,,\\ \varphi_2(\varrho) &= \frac{\varrho(1-\varrho^2) + (\mu^2-1)\left[-\varrho^3 + \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right)\varrho - \frac{1}{\mu^2\,\varrho}\right]\tau}{1 + (\mu^2-1)\,\tau}\end{aligned}\right\} \tag{71a,b}$$

berechnet sich der Winkel φ nach der einfachen Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{\alpha - \varphi_1}{\varphi_2}\,. \tag{72}$$

Für ein einmal gewähltes Halbmesserverhältnis μ und für gegebene Rückführungskonstanten c_s und c_d und damit für gegebene Werte von σ und τ sind die Nenner der Funktionen (71 a, b) konstante Größen, während die Berechnung der einfachen Zählerfunktionen in vorliegendem Falle noch dadurch vereinfacht wird, daß die in den eckigen Klammerausdrücken angegebenen Funktionen für $\mu = 2$ durch $-Z$ und $-N$ in (43 b, c) bereits ermittelt und in Tabelle 2 angegeben worden sind. Für die unten angegebenen Werte $\sigma = 3$, $\tau = 0{,}5$ sind die Funktionen $\varphi_1(\varrho)$ und $\varphi_2(\varrho)$ in den beiden ersten Spalten der Tabelle 6 berechnet worden.

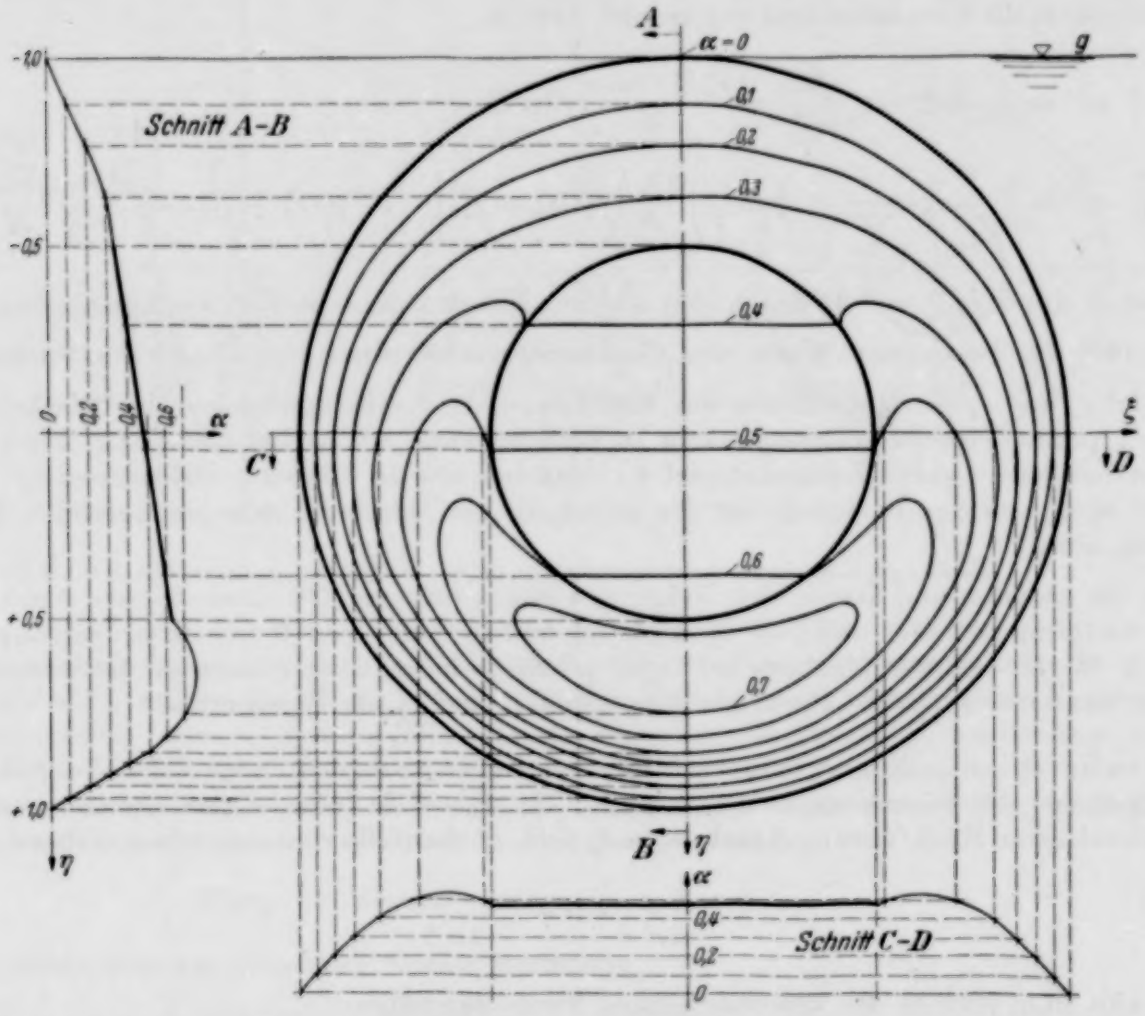

Abb. 10. Die Höhenlinien der Wölbfläche der Kreisringmembran mit elastisch gelagerter Innenkreisplatte unter hydrostatischem Druck für die durch die Werte α gegebenen Höhenlagen der zur Basis der Wölbfläche parallelen Schnittebenen.

Tabelle 6. *Die den angegebenen Werten von ϱ entsprechenden Werte der Funktionen φ_1 und φ_2 sowie die denselben und den gewählten α-Werten entsprechenden Werte von $\cos\varphi$*

Nach (71 a, b)			Werte von $\cos\varphi$ nach (72) für							
ϱ	φ_1	φ_2	$\alpha = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	ϱ
0,5	0,48710	0,15	—	—	—	−0,580	+0,086	+0,754	—	0,5
0,55	0,52143	0,19341	—	—	—	−0,628	−0,111	+0,407	+0,926	0,55
0,6	0,53357	0,22398	—	—	—	−0,596	−0,150	+0,296	+0,741	0,6
0,65	0,52547	0,24219	—	—	—	−0,518	−0,105	+0,308	+0,724	0,65
0,7	0,49875	0,24768	—	—	—	−0,416	+0,005	+0,408	+0,810	0,7
0,75	0,45459	0,24063	—	—	−0,644	−0,227	+0,189	+0,602	—	0,75
0,8	0,39398	0,22050	—	−0,879	−0,426	+0,027	+0,480	+0,935	—	0,8
0,85	0,31754	0,18699	—	−0,629	−0,094	+0,441	+0,976	—	—	0,85
0,9	0,22598	0,13932	−0,904	−0,186	+0,530	—	—	—	—	0,9
0,95	0,12004	0,07719	−0,260	—	—	—	—	—	—	0,95
1	0	0	—	—	—	—	—	—	—	1

Schließlich findet man aus (59) für s und aus (67) für δ, wenn man für die beiden Nenner der Funktionen φ_1 und φ_2 in (71a,b) die Abkürzungen

$$\nu_1 = 1 + \sigma \ln \mu\,, \quad \nu_2 = 1 + (\mu^2 - 1)\,\tau \tag{73a,b}$$

einführt, nach kurzer Rechnung

$$s = \frac{\gamma\, r_a^3}{4\,S}\,\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2\,\nu_1}\,, \qquad \delta = \frac{\gamma\, r_a^3}{8\,S}\,\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2\,\nu_2}\,. \tag{74a,b}$$

Für die Auslenkungen w_o bzw. w_u (Abb. 9c) des höchsten bzw. tiefsten Randpunktes der Innenkreisplatte erhält man aus (74a,b) wegen $w_o = s - r_i\,\delta$ bzw. $w_u = s + r_i\,\delta$

$$\left.\begin{aligned} w_o &= \alpha_o \frac{\gamma\, r_a^3}{8\,S} \quad \text{bzw.} \quad w_u = \alpha_u \frac{\gamma\, r_a^3}{8\,S} \\ \text{mit} \qquad \alpha_o &= \frac{\mu^2 - 1}{\mu^3}\left(\frac{2\,\mu}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right), \quad \alpha_u = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^3}\left(\frac{2\,\mu}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{75a,b}$$

Im weiteren wurde $\mu = 2$, $\sigma = 3$, $\tau = 0{,}5$ gewählt. Damit erhält man aus (73a,b) $\nu_1 = 3{,}07945$ und $\nu_2 = 2{,}5$. Aus (75a,b) erhält man dann $\alpha_o = 0{,}33709$, $\alpha_u = 0{,}63709$ und erkennt, daß dann bei der Wahl äquidistanter α-Werte mit 0,1 als Wertedifferenz die drei Werte $\alpha = 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6$ Höhenlinien bedingen werden, die durch horizontale, die Innenkreisplatte überquerende Sehnen abgeschlossen werden. Die Berechnung der Polarkoordinate φ nach Wahl der in Tabelle 6 angegebenen Werte ϱ ist ohne weitere Erklärung verständlich.

Wie bei Zahlenbeispiel 2 dient schließlich Tabelle 7 in leicht verständlicher Weise der Berechnung der Schnittlinien des Wölbhügels mit vertikalen bzw. horizontalen Schnittebenen. In Abb. 10 sind neben dem Höhenlinienplan, wie er nach Tabelle 6 ermittelt wurde, diese Schnittlinien links bzw. unten angegeben worden. Sie liefern zudem insofern noch eine wertvolle Kontrolle, als ihre Schnittpunkte mit den durch $\alpha = 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots$ gegebenen Höhen mit den anderweitig ermittelten Punkten des Höhenlinienplanes auf denselben Ordnern liegen müssen.

Schließlich erhält man aus (61) mit $h = r_a$

$$V = \frac{\gamma\, r_a^5\,\pi}{8\,S\,\nu_1\,\mu^4}\left\{\mu^4 - 1 + \left[(\mu^4 - 1)\ln\mu - (\mu^2 - 1)^2\right]\sigma\right\}. \tag{76}$$

Man erhält $V = 0{,}15296\,\gamma\, r_a^5/S$. Analog erhält man aus (62)

$$w_{mittl} = \frac{\gamma\, r_a^3}{8\,S\,\nu_1\,\mu^4}\left\{\mu^4 - 1 + \left[(\mu^4 - 1)\ln\mu - (\mu^2 - 1)^2\right]\sigma\right\}, \tag{77}$$

also $w_{mittl} = 0{,}04869\,\gamma\, r_a^3/S$. Aus Abb. 10 oder aus Tabelle 7 entnimmt man für $\cos\varphi = 1$ und $\varrho = 0{,}65$ den Wert $\alpha_{max} = 0{,}76766$, woraus $w_{max} = 0{,}0959575\,\frac{\gamma\, r_a^3}{S}$ und $\frac{w_{mittl}}{w_{max}} = 0{,}508$ folgt.

Tabelle 7. *Die zu den angegebenen Werten von ϱ und $\cos\varphi$ nach (72) berechneten Werte von α.*

ϱ	$\cos\varphi = -1$	$\cos\varphi = 0$	$\cos\varphi = +1$	ϱ
	$\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$	$\alpha = \varphi_1$	$\alpha = \varphi_1 + \varphi_2$	
0,5	0,33710	0,48710	0,63710	0,5
0,55	0,32802	0,52143	0,71484	0,55
0,6	0,30959	0,53357	0,75755	0,6
0,65	0,28328	0,52547	0,76766	0,65
0,7	0,25107	0,49875	0,74643	0,7
0,75	0,21396	0,45459	0,69522	0,75
0,8	0,17348	0,39398	0,61448	0,8
0,85	0,13055	0,31754	0,50453	0,85
0,9	0,08666	0,22598	0,36530	0,9
0,95	0,04285	0,12004	0,19723	0,95
1	0	0	0	1

Bei entsprechender Umdeutung der Größen erkennt man in (6) das Geschwindigkeitsrelief und in (22a) das *Hagen-Poiseuille*sche Gesetz für laminare Kreisrohrströmung wieder. Über die viel weiter gehende Analogie zwischen Membranauswölbung und laminarer Flüssigkeitsströmung wird in einer späteren Arbeit berichtet werden.

(Eingegangen am 23. Dezember 1956.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *Karl Karas*, Technische Hochschule Darmstadt, Institut für Angewandte Mechanik und Technische Schwingungslehre.

Gruppentheorie.

Von **W. Specht**, o. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, LXXXII. Band.) VII, 457 Seiten Gr.-8°. 1956. DM 66,—; Ganzleinen DM 69,60

Inhaltsübersicht: I. Einführung. Die Grundlagen. — Die Untergruppen einer Gruppe. — Homomorphie und Isomorphie. — Gruppen mit Operatoren. — II. Freie und direkte Zerlegung. Die freien Gruppen. — Freie Zerlegungen. — Direkte Zerlegung. — Theorie der abelschen Gruppen. — III. Allgemeine Strukturtheorie. Theorie der Normalfolgen. — Theorie der p-Gruppen. — Erweiterungstheorie. — Bemerkungen und Hinweise. — Namen- und Sachverzeichnis.

Aus dem Vorwort: Der Begriff der Gruppe ist so alt wie die Mathematik selbst. Ins mathematische Bewußtsein tritt er jedoch erst mit Beginn des 19. Jahrhunderts. Der Erfordernisse der GALOISschen Theorie algebraischer Gleichungen führten zu der Entwicklung einer Theorie der endlichen Permutationsgruppen, die sich im Verlaufe eines Jahrhunderts zu einer weitgespannten Theorie der Gruppen endlicher Ordnung umbildete.

Im gleichen Zeitraum gab aber auch die invariantentheoretische Entwicklungstendenz der Geometrie und der Analysis Anlaß zur Untersuchung spezieller unendlicher Gruppen und führte damit zu einem weiteren Ausbau der Gruppentheorie. Umgekehrt bot die Entwicklung dieser Theorie die Möglichkeit neuer Methoden in fast allen Teilgebieten der Mathematik.

Aus diesem Wechselspiel gegenseitiger Anregungen entstand um 1920 zugleich mit der vollständigen Strukturumwandlung der Algebra und dem Eingang mengentheoretischer Überlegungen in die Mathematik die selbständige Disziplin einer allgemeinen Gruppentheorie.

Von den Ergebnissen der allgemeinen Gruppentheorie handelt dieses Buch. Dabei Vollständigkeit anzustreben, würde alle Kraft übersteigen und jeden Rahmen sprengen. Es kann nur Aufgabe sein, aus der riesenhaften Fülle der Ergebnisse eine Auswahl zu treffen, die den Leser die Schönheit der Disziplin und die Vielfalt ihrer Methode erkennen läßt.

Eine strenge Auswahl des Stoffes ist indes notwendige Funktion des persönlichen Geschmacks; diese Feststellung muß den Kenner darüber trösten, wenn es dies oder jenes vermißt, was ihm am Herzen liegt. Die Enge des Raumes zwang zu konzisem Stil; ein genaues Sachverzeichnis gibt dem Leser die erforderliche Hilfe ...

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Einfache Berechnungsmethoden für Verbundkonstruktionen.

Träger auf elastischen Stützen. Fachwerkträger mit biegesteifen Gurten. Von Dr.-Ing. **Hannskarl Bandel**, Berlin-Charlottenburg. Mit 95 Abbildungen. IV, 69 Seiten 4°. 1957. Steif geheftet DM 16,—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Berechnung von statisch bestimmten Verbundträgern bzw. Verbundträgergurten. — Näherungsverfahren zur Berechnung der statisch unbestimmtem Größen aus Kriechen und Schwinden bei statisch unbestimmten Verbundträgersystemen. — Iteratives Momentenausgleichsverfahren zur Berechnung von Durchlaufträger auf elastischen Stützen. — Berechnung von äußerlich statisch bestimmte gelagerten Fachwerkträgern mit unmittelbar belasteten Verbundträgergurten. — Berechnung von äußerlich statisch unbestimmt gelagerten Fachwerkträgern mit einem Verbundträgerlastgurt. — Prinzipbeispiel von äußerlich statisch unbestimmt gelagerten Fachwerkträgern mit Verbundgurt. — Literaturverzeichnis.

In dem Bestreben, die Anwendung von Verbundträgern, die sich seit mehreren Jahren in der Praxis ausgezeichnet bewähren, zu erweitern, entstanden die vorliegenden Untersuchungen über Fachwerkverbundträgersysteme. Dabei wurde im Hinblick auf die Anforderungen der Praxis versucht, neben den genaueren Lösungen auch Näherungslösungen zu entwickeln, in denen nur die wesentlichen Einflüsse berücksichtigt werden.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in drei wesentliche Abschnitte. Die darin gezeigten Entwicklungen wurden erforderlich, um selbst schwierigste Systeme in verhältnismäßig einfacher Weise berechnen zu können. Der erste Abschnitt, der die Kapitel B und C enthält, bringt Näherungsverfahren, die es erlauben, jede beliebige Verbundkonstruktion zu berechnen, gleichgültig, ob es sich um Brücken- oder Hochbaukonstruktionen handelt. Diese Entwicklungen waren notwendig, denn die bisherigen Näherungsverfahren hatten jedes für sich nur einen beschränkten Anwendungsbereich. Im zweiten Abschnitt, Kapitel D, wird der Träger auf elastischen Stützen behandelt. Es gelang hierbei, das Momentenausgleichverfahren von Kani auch auf diese Träger zu erweitern. Es können z. B. Längsträger auf elastischen Querträgern mit diesem Iterationsverfahren einfach berechnet werden. Besonders vorteilhaft läßt es sich aber für die Berechnung von Fachwerkträgern mit biegesteifen Gurten verwenden, bzw. es ermöglicht überhaupt erst eine einfache Berechnung solcher Systeme. Der dritte Abschnitt, der die Kapitel E und F umfaßt, behandelt die Berechnung von Fachwerkträgern mit biegesteifen Lastgurten. Das gezeigte Verfahren wird allgemein entwickelt, und zwar sowohl für Stahlkonstruktionen als auch für Verbundkonstruktionen. Durch sinngemäße Anwendung der in den ersten beiden Abschnitten gezeigten Entwicklungen und Formeln können solche Systeme, gleichgültig, ob sie äußerlich statisch bestimmt oder statisch unbestimmt sind, ohne allzu großen Rechenaufwand erfaßt werden.

SPRINGER · VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 0,8 K.B./Z. 040.